VII. AREA E PERIMETRO ELLISSE

AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

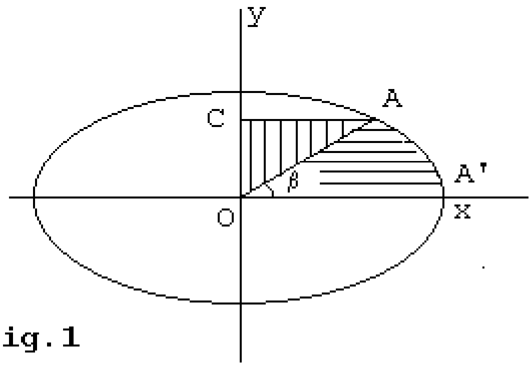


Fig.1

I°) Sia $S(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$ l'area OCAA'.
La funzione S(x) deve essere tale e poiché è $S(x)=\frac{1}{2}xy+\text{area settore OAA'}$ e l'arco A' è tale che il suo coseno vale $\frac{x}{q}$ avremo $\frac{\text{Area settore OAA'}}{S}=\frac{arc\cos\frac{x}{q}}{\frac{\pi}{2}}$

e quindi $S(x)=\frac{1}{2}x\frac{m}{q}\sqrt{q^2-x^2}+\frac{2S}{\pi}arc\cos\frac{x}{q}$ espressione che derivata e semplificata darà la Funzione primitiva:

$$S(x)=\frac{m}{q}\left(\frac{x\sqrt{q^2-x^2}}{2}+\frac{q^2}{2}arc\cos\frac{x}{q}\right)=OCAA'$$

che per x = q cosα; y = m senα diventa:

$$S(x)=OCA+OAA'=\frac{qm}{2}(\cos\alpha sen\alpha+arc\cos\cos\alpha)$$

da cui: $S(x)_{(OAA')}=\frac{qm}{2}arc\cos\cos\alpha=\frac{qm}{2}\frac{\alpha^o\pi}{180}=\frac{qm}{2}a^R$ (α in rad)

II°) INTEGRALE DI VAG.

In modo più rigoroso possiamo calcolare l'integrale (per parti) delle uguaglianze parametriche $x=q\cos\alpha$; $y=m sen\alpha$; $y'=m\cos\alpha$

$$S(x)_{(OCAA')}=\int q\cos\alpha\, m(\cos\alpha)\,d\alpha=qm\int\cos^2\alpha\,d\alpha=qm\int\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\,d\alpha=$$

$$=qm\left[\int\frac{d\alpha}{2}+\int\frac{\cos2\alpha\ d\alpha}{2}\right]=qm\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{sen2\alpha}{4}\right)=\frac{qm}{2}\alpha+\frac{q\cos\alpha\ \ msen\alpha}{2}$$

$$\begin{pmatrix}\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha); & \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha);\\ 2\alpha=t\quad d\alpha=\frac{1}{2}dt; & \int\frac{\cos t}{2}dt=\frac{1}{2}sent=\frac{1}{2}\ sen2\alpha\end{pmatrix}$$

l'ultimo membro dell'espressione <u>S</u> è l'area OCA per cui avremo in radianti l'area $S(x)_{OAA'}=\frac{mq}{2}\alpha$ (Esempi numerici più avanti)

Come si vede l'area dell'Ellisse dipende dall'angolo α legato all'Ellisse dalla relazione: $\tan\beta=\frac{m}{q}\tan\alpha$

AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

Essendo α in radianti, da ciò che abbiamo visto l'area di un settore dell'Ellisse e':

$$S = \frac{qm}{2} arc\cos(\cos\alpha) = \frac{qm}{2}\alpha$$

$$\text{dove} \quad \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad S = \frac{qm}{2}\frac{\pi}{2} \text{ area quadrante Ellisse}$$

Se sostituiamo q = R + r e m =R - r(sistema algebrico in cui dati due valori R e r ha soluzione per 2R=q+m e 2r=q-m), l'area del settore dell'Ellisse sarà:

$$S = \frac{qm}{2}\alpha = \frac{R^2 - r^2}{2}\alpha$$

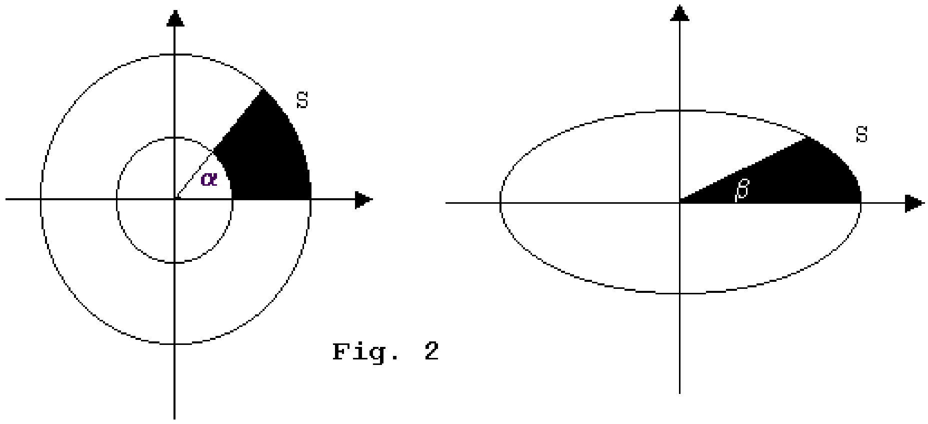


Fig. 2

E poichè α e' l'angolo delle circonferenze R ed r (Cap. V° ELLISSE), quest'ultima formula oltre che a rappresentare l'area di un settore dell'Ellisse rappresenta anche l'area di un settore della corona circolare di ampiezza (R-r) di uguale valore:

L'area di un settore di Ellisse di angolo β e' uguale all'area di un settore di corona circolare di angolo α corrispondente a β mediante la formula $\alpha = arc\tan(\frac{q}{m}\tan\beta)$.

Possiamo anche aggiungere che l'area di un settore di Ellisse è proporzionale all'angolo che forma l'area del settore della corona circolare $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{qm}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} = \text{costante}$. Si tenga presente che l'angolo dell'area del settore dell'Ellisse va preso iniziando da zero,cioè dall'asse delle ascisse con movimento antiorario.

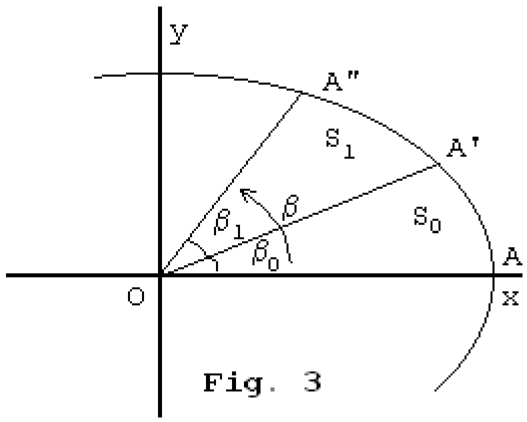


Fig. 3

Nell'Ellisse in figura si ha che $\beta=\beta_1+\beta_0$ e $S=S_1+S_0$ dove S è l'area del settore relativo a β. In realtà i due angoli calcolabili sono β e β_0 perché partono dall'ascissa ed essi danno luogo ai due angoli del settore corona-circolare α e α_0, tramite $\tan\alpha=\frac{q}{m}\tan\beta$ e $\tan\alpha_0=\frac{q}{m}\tan\beta_0$; mentre β_1 non può dare il valore di α_1 non partendo dal valore zero dell'ascissa. Questo perché gli angoli dell'ellisse non sono proporzionali alle aree, mentre le aree della corona-circolare (uguali alle aree dell' Ellisse) sono proporzionali ai propri angoli, quindi $\frac{S_1}{\alpha_1}=\frac{S_0}{\alpha_0}=\frac{S}{\alpha}$ ma dove si deve tener presente che nel rapporto $\frac{S_1}{\alpha_1}$, α_1 non ha un corrispettivo βeta nella Ellisse, perché l'area S_1 assume un valore posizionale in quanto l'integrale che la determina vale a partire dall'ascissa.

Noti β e β_0 si calcolerà S e S_0 e poi $S_1=S-S_0$ e mediante la proporzione sopra indicata si troverà $\alpha_1=\frac{S_1\alpha_0}{S_0}$ *].

[**ESEMPIO 1**: dell'Ellisse in Fig. 3 siano i semi-assi q=3, m=2 ed i punti A'(2,320424812; 1,267653772) A"(0,589580871; 1,960996844)e i rispettivi angoli al centro:

$$\beta_0=\arctan\frac{1{,}267653772}{2{,}320424812}=28{,}64788823$$ e $$\beta=\arctan\frac{1{,}960996844}{0{,}589580871}=73{,}266403\,°$$

mentre avremo gli angoli parametrici:

$$\alpha_0=\arctan\frac{q}{m}\tan\beta_0=39{,}333031\,°=0{,}686490895\ ^{Rad}$$

$$\alpha=\arctan\frac{3}{2}\tan 73{,}266403=78{,}66606232\,°=1{,}372981797\ ^{Rad}$$

(entrambe anche con la formula parametrica $x=q\cos\alpha$ o $y=m\sin\alpha$)
e le rispettive aree ellittiche:

$$S=\frac{mq}{2}\alpha=3\cdot 1{,}372981797\ ^{Rad}=4{,}118945391$$

$$S_0=3\cdot 0{,}686490895\ ^{Rad}=2{,}059472685$$

$$S_1=S-S_0=4{,}118945391-2{,}059472685=2{,}059472705$$

Come vediamo l'Area S è doppia dell'Area S_0, quindi se $S_0=S_1$, poiché sappiamo che $\frac{S}{\alpha}=\frac{S_0}{\alpha_0}=\frac{S_1}{\alpha_1}=\frac{mq}{2}$ dovrà essere $\alpha_0=\alpha_1$, ma α_1 non è determinabile dalle formule di calcolo viste in quanto l'area S_1

non è adiacente all’ascissa quindi da α_1 non possiamo calcolare l’angolo al centro β_1 che va calcolato per differenza:

$$\beta_1 = \beta - \beta_0 = 73,266403° - 28,6478664° = 44,6185366°$$

Tale angolo se fosse adiacente all’ascissa avrebbe come ipotetico angolo parametrico $\alpha_1' = arc\tan\frac{q}{m}\tan 44,6185366° = 55,95690767°$ anziché $\alpha_1 = \alpha_0 = 39,333031°$.]

AREA PARZIALE DELL'ELLISSE

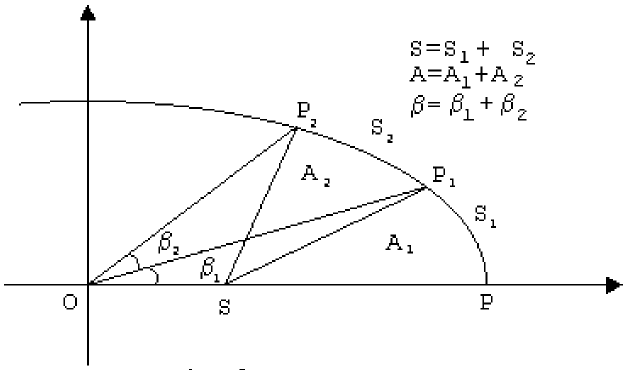


Fig.4

Sia (vedi Fig.4) **S_1** l'area ed **E_1** il relativo angolo parametrico in radianti di una Ellisse (di semiassi q > m); inoltre sia l'area $POP_2 = S = (S_1 + S_2)$ ed **E** l'angolo parametrico relativo in radianti, abbiamo visto che $\frac{S}{E} = \frac{S_1}{E_1} = \frac{qm}{2}$. Ed osservando la Fig.4 vediamo:

$$A = S - areaSOP_2 = S - \frac{\overline{OS}\, m \sin E}{2}$$

e sostituendo S: $A = \frac{mq}{2} E - \frac{OS\, m}{2} \sin E = \frac{mq}{2}\left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right)$.

Si consideri che essendo il punto S tra O e P è sempre $\frac{\mathbf{OS}}{\mathbf{q}} < \mathbf{1}$, dove OS è una qualunque distanza dal centro Ellisse.

Volendo il valore dell'area A_2 con $A_2=A-A_1$, sempre <u>a partire dall' ascissa</u> come per le aree S_1 e S, si avrà:

$$A_1 = \frac{mq}{2}\left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)$$

pertanto $A_2 = A - A_1 = \frac{mq}{2}\left[\left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right) \right] = \frac{mq}{2} M_2$.

Cioè

$$\frac{A}{E - \frac{OS}{q} \sin E} = \frac{A_1}{E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1} = \frac{A_2 = A - A_1}{\left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)} = \frac{mq}{2}$$

Posto $M = \left(E - \frac{OS}{q} \sin E \right)$ e $M_1 = \left(E_1 - \frac{OS}{q} \sin E_1 \right)$ (M e M_1 sono valori in Rad)

avremo $\frac{A}{M} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M - M_1}$ posto $M_2=M-M_1$ avremo $\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2}$

e se $A_1=A_2$ dovrà essere $M_2 = M_1$: analogamente a quanto visto precedentemente per l'area S_1 e α_1, l'angolo M_2 (proporzionale a A_2)

non ha un corrispettivo βeta nella ellisse, ma dovrà essere ricavato per differenza.
Possiamo allora scrivere la relazione geometrica che lega le aree dell’ellisse agli angoli di riferimento: $\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_0}{E_0}=\frac{qm}{2}$ e

$\frac{A_1}{M_1}=\frac{A_2}{M_2}=\frac{qm}{2}$ per cui $\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_0}{E_0}=\frac{A_1}{M_1}=\frac{A_2}{M_2}=\frac{qm}{2}$ con i relativi significati visti per S,A,E,M.

ESEMPIO 2: Sia una ellisse di semiassi q=3 e m=2 (vedi **Fig.4**) e sia l’angolo di riferimento in radianti

$\alpha_1 = 39{,}333031°\frac{\pi}{180} = 0{,}686490895^{Rad}$ la distanza OS=1,5 (per cui $\frac{\overline{OS}}{q}=0{,}5$).

Sappiamo essere $\beta_1 = \arctan\frac{2}{3}\tan 39{,}333031° = 28{,}647888°$

$M_1 = (0{,}686490895^{R} - 0{,}5\sin 39{,}333031°) = 0{,}369577452^{R}$

M_1 è necessariamente in Rad perché proviene da α^R

e quindi l’area $A_1 = \frac{3\cdot 2}{2}M_1 = 1{,}1087323 56$

Posto $A=A_1+A_2$ e $A_1=A_2$ si ha $\frac{A_1}{M_1}=\frac{1{,}108732356}{0{,}369577452}=\frac{qm}{2}=3$ e $\frac{A}{M}=\frac{2A_1}{2M_1}=\frac{2{,}217464712}{0{,}739154904}=\frac{qm}{2}=3$

dovrà allora essere $M=\alpha-0{,}5\sin\alpha=0{,}739154904$ dove α è l’angolo di riferimento del settore A. Risolvendo α rispetto a M abbiamo $\alpha=1{,}206308053^R=69{,}11636023°$ infatti:
$M=1{,}206308053-0{,}5\sin 69{,}11636023°=0{,}739154903$ sufficientemente vicino al valore M di partenza.

Il valore $\frac{A_2}{M_2}$ è dato da $M_2=M_1$ ma in realtà M_2 non ha corrispondenza con l’area A_2 segnata in **Fig.4** in quanto l’area non è adiacente all’ ascissa; esso è un valore proporzionale.

PROPRIETA' DELLE AREE DELL'ELLISSE

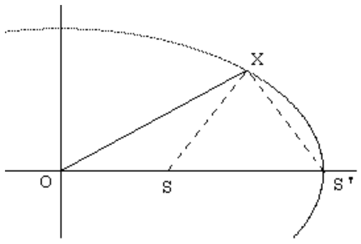


Fig. 5

L'espressione $M=(E-\frac{OS}{q}\sin E)$ determina l'area di un qualunque settore di ellisse; infatti ogni punto dell'ellisse è determinato dall'angolo parametrico E mentre la posizione del punto S lungo l'ascissa ne determina l'area (vedi Fig.5).

per $OS=0$ avremo $S_x=\frac{mq}{2}E$ area $OS'\hat{X}O$

per $OS<q$ avremo $S_x=\frac{mq}{2}(E-\frac{OS'}{q}\sin \mathrm{E})$ area $SS'\hat{X}S$

per $OS=q$ avremo $S_x=\frac{mq}{2}(E-\sin E)$ area $S'\hat{X}S'$

Dato il rapporto $\frac{OS}{q}=\varepsilon$ potremo scrivere per qualsivoglia area

$S_x=\frac{mq}{2}(E-\varepsilon\sin E)=\frac{mq}{2}M$.

Possiamo anche considerare il valore $\sqrt{qm}=R$ come raggio di una

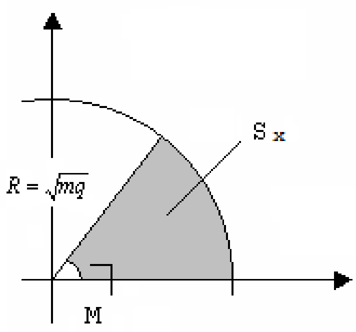
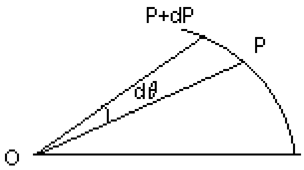


Fig. 5bis

circonferenza, che darà sempre $S_x=\frac{qm}{2}M=\frac{R^2}{2}M$ per cui l'area della circonferenza vale la relativa area dell' ellisse e se il suo tempo di percorrenza è P, esso varrà sia per l'ellisse sia per la circonferenza. Ora se P è un valore medio possiamo ipotizzare che l'arco della circonferenza verrà spazzata a velocità costante e quindi ad ogni tempuscolo t corrisponda un angolo al centro ed a questi la relativa area della circonferenza che a sua volta rappresenta un'area dell'ellisse. Inoltre per valori di t uguali si avranno nella circonferenza angoli al centro ed aree uguali, corrispondenti ad aree $\mathbf{S_x}$ dell'Ellisse uguali e percorse nello stesso tempo.

Da tutte queste considerazioni possiamo dire che nella circonferenza di riferimento di una ellisse, per la legge temporale, le aree S_x, sono lineari in un intervallo di tempo ed i punti del perimetro che le determinano possono essere animati da un moto di velocità angolare costante nella circonferenza ma diversa nella ellisse: questo ci permette di definire la proprietà dell' Ellisse, relativa ad una qualunque area $\mathbf{S_x}$:

AREE UGUALI SONO PERCORSE IN TEMPI UGUALI



Si consideri che la Fig.5 bis ci richiama, dal punto di vista geometrico, il concetto di velocità areale: «intenderemo per velocità areolare $\frac{dS}{dt}$ il rapporto fra l'area dS descritta nell'intervallo infinitesimo (t,t+dt) dal raggio vettore e lo stesso dt. L'area dS descritta da P-O nel tempo dt vale a meno di infinitesimi di ordine superiore, un settore circolare di raggio uguale a ρ (valore del raggio vettore all'istante t) e di angolo al centro dθ, incremento di θ nell'intervallo (t,t+dt). Si ha allora $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$. Quindi la velocità areale è $S' = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}$ "Dario Graffi-MECCANICA RAZIONALE- C.Editrice Prof.R.Pàtron".

L'ultima espressione è la stessa vista per $\rho^2 = \left(\sqrt{mq}\right)^2$, quando si sia preso per angolo al centro gli angoli del vettore dell'ellisse, la relazione che lega questi agli angoli M e le rispettive aree S_x.

In **ASTRONOMIA** il valore E è detto **Anomalia Eccentrica** e quando il valore OS è uguale alla semidistanza focale (c) per cui $\frac{OS}{q} = \frac{c}{q} = e$ (eccentricità) il valore $M = (E - e\sin E)$ è chiamato **Anomalia Media** (Mean Anomaly), inoltre la proprietà di uguaglianza tra le aree, per uno stesso tempo è chiamata *Seconda Legge Sperimentale di Keplero*.

SUL TEOREMA DEI PIANETI E L'AREA DELL'ELLISSE

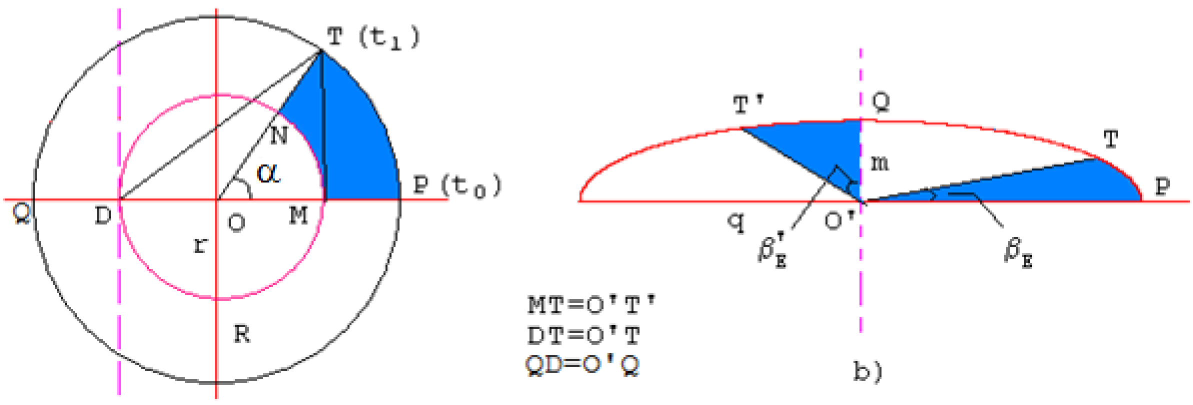


Fig.8

Per effetto del Teorema dei Pianeti (fig.8) la circonferenza a) di raggio R dà luogo all'ellisse b) (vedi Cap.VI Pag.25-26) di semi assi q=R+r e m=R-r.

Sulla Circonferenza abbiamo per Carnot:

$$\overline{DT}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(180° - \alpha) \qquad \overline{MT}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha)$$

E le coordinate sull'Ellisse:

T $\left(q\cos\frac{\alpha}{2}; m\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ e T' $\left(q\sin\frac{\alpha}{2}; m\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ e le distanze

$$\overline{O'T}^2 = q^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + m^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = (R+r)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + (R-r)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 + 2Rr\cos^2\alpha$$

$$\overline{O'T'}^2 = q^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + m^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = (R+r)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + (R-r)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 - 2Rr\cos^2\alpha$$

Ora volendo calcolare l'area della ellisse così tracciata, (per quanto visto nel paragrafo precedente) tale area risulta essere

$\overline{PO'TP} = \overline{QO'T'Q} = \frac{mq}{2}\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2}\frac{\alpha}{2}$ per cui l'area $\overline{PMNT} = \frac{R^2 - r^2}{2}\alpha$ della circonferenza è il doppio di ciascuna area dell'ellisse.

Ora se il tracciamento dell'Area della circonferenza avviene nel tempo $t = (t_1 - t_0)$ vuol dire che l'arco PT della circonferenza e PT (o QT') dell' ellisse sono percorsi nello stesso tempo e ad ogni punto T della circonferenza corrisponde un punto T (o T') nell'ellisse poichè i vettori DT=O'T (o MT= O'T').

Ovviamente per $\alpha = \pi = 180°$ nella circonferenza corrisponderà un punto nella ellisse il cui parametro è $\alpha/2 = \pi/2 = 90°$.

Con $\frac{\alpha}{2}$ abbiamo tutte le considerazioni viste nel calcolo dell'area dell'ellisse, per cui è possibile calcolare direttamente l'Anomalia Eccentrica per E=α/2 $M = \left(\frac{\alpha^R}{2} - \varepsilon\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ partendo da un tempo medio t della circonferenza.

ESEMPIO 3 Sia l'ellisse di semiassi q=3 e m=2 e la circonferenza R=2,5 e r=0,5 e nel tempo t (43,59111827 gg) si abbia $\alpha = \frac{360°}{P} t = 42°,96572823 = 1^R,49978684$ (P=365,24 gg periodo di rivoluzione) e $\frac{\alpha}{2} = 21°,48286412 = 0^R,749893423$, come da Fig.8 a).

Dalla circonferenza con il teorema di Carnot:

$$\overline{MT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 4,670596221 \qquad \overline{MT} = 2,161156223$$

$$\overline{DT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 8,329403779 \qquad \overline{DT} = 2,886070647$$

****

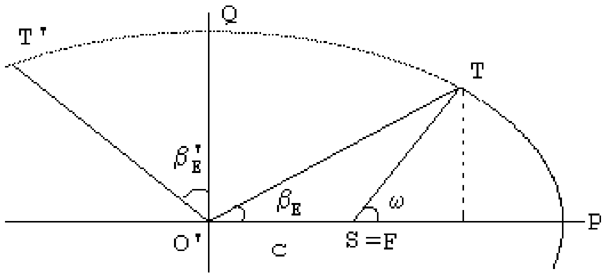


Fig. 9

Tenendo conto del Teorema dei Pianeti applichiamo alla relativa ellisse Fig.9 i dati calcolati sopra MT, DT della circonferenza di Fig.8 e angolo α/2.

Applichiamo i valori parametrici per le coordinate

del punto T':
$$\begin{cases} x = m\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos 21,48286412 = 1,861054277 \\ y = q\sin\frac{\alpha}{2} = 3\sin 21,48286412 = 1,09866883 \end{cases}$$

Quadrando e sommando $\overline{O'T'} = \sqrt{4,67059622} = 2,161156223$ **= MT**

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E' = \arctan\frac{q}{m}\tan\frac{\alpha}{2} = \arctan\frac{3}{2}\tan 21,48286412 = \arctan 0,590347548 = 30°,5553738$$

Per il punto T:
$$\begin{cases} x = q\cos\frac{\alpha}{2} = 3\cos 21,48286412 = 2,791581416 \\ y = m\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin 21,48286412 = 0,732445886 \end{cases}$$

Quadrando e sommando $\overline{O'T} = \sqrt{8,329403779} = 2,886070647$ **= DT**

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E = \arctan\frac{m}{q}\tan\frac{\alpha}{2} = \arctan\frac{2}{3}\tan 21,48286412 = \arctan 0,262376648 = 14°,70169181$$

Vediamo Aree $\overline{PO'TP} = \overline{QO'T'Q} = \frac{q \times m}{2}\frac{\alpha}{2} = \frac{3\times 2}{2}\ 0^R,749893421 = 2,2496802$ **metà dell'area indicata nella circonferenza:**

$$\overline{PMNT} = \frac{(2,5)^2 - (0,5)^2}{2} \times 1^R,49978684 = 4,49936052$$

LUNGHEZZA DELL'ARCO DELL'ELLISSE RETTIFICAZIONE

Abbiamo visto (con **asse maggiore q sull'ascissa**) per un punto A sull'Ellisse:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x = q\cos\alpha = (R+r)\cos\alpha \\ \overline{OA}\sin\beta = y = m\sin\alpha = (R-r)\sin\alpha \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{m}{q}\tan\alpha;$$

Sostituiamo nella formula di rettificazione $\frac{ds}{dx} = \left(\sqrt{1+(f'x)^2}\right)$ i valori

$$\frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = m\cos\alpha \cdot \frac{1}{-q\sin\alpha} = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha}; \qquad \frac{dx}{d\alpha} = -q\sin\alpha \quad dx = d\alpha(-q\sin\alpha)$$

si ha $ds = \left[\sqrt{1+\left(-\frac{m}{q}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}\, d\alpha(-q sin\alpha)\right] = \left[\sqrt{\frac{q^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}{q^2\sin^2\alpha}\left(-q\sin\alpha\right)^2}\right] d\alpha$

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{q^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha} = \sqrt{(R+r)^2\sin^2\alpha + (R-r)^2\cos^2\alpha} \qquad \textbf{1]}$$

Ponendo invece l'asse minore m sull'ascissa, abbiamo:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x = m\cos\alpha = (R-r)\cos\alpha \\ \overline{OA}\sin\beta = y = qsen\alpha = (R+r)sen\alpha \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{q}{m}\tan\alpha;$$

e con $\frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = q\cos\alpha\frac{1}{-m\sin\alpha} = -\frac{q}{m}\frac{1}{\tan\alpha}; \qquad \frac{dx}{d\alpha} = -m\sin\alpha \quad dx = d\alpha(-m\sin\alpha)$

nella stessa formula di rettificazione $\frac{ds}{dx} = \left(\sqrt{1+(f'x)^2}\right)$ si ottiene:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{m^2\sin^2\alpha + q^2\cos^2\alpha} = \sqrt{(R-r)^2\sin^2\alpha + (R+r)^2\cos^2\alpha} \qquad \textbf{2]}$$

La 1] e 2] rappresentano la "Formula di rettificazione dell'Integrale ellittico di 2ª specie" sotto nuova veste.
Infatti sviluppando la 1] in cos(α) e la 2] in sin(α) si ottiene rispettivamente:

$$s = q\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}\, d\alpha \quad 1] \qquad s = q\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\, d\alpha \quad 2]$$

che rappresentano la forma classica dell'integrale indicato.

Analizziamo:

la 1] $\quad q^2(1-e^2\cos^2\alpha) = (q^2 - c^2\cos^2\alpha) = (q - c\cos\alpha)\ (q + c\cos\alpha)$

$ma \quad anche\ \ (q - c\cos\alpha) + (q + c\cos\alpha) = 2q$

e la 2] $\quad q^2(1-e^2\sin^2\alpha) = (q^2 - c^2\sin^2\alpha) = (q - \sin\alpha)\ (q + c\sin\alpha)$

$ma \quad anche\ \ (q - c\sin\alpha) + (q + \sin\alpha) = 2q$

Allora il valore dell'integrale ellittico è dato dalla distanza di un generico punto A dai FUOCHI F e F':

$AF = (q - c\cos\alpha) \quad AF' = (q + c\ \cos\alpha) \quad e \quad AF = (q - c\sin\alpha) \quad AF' = (q + c\ \sin\alpha)$

giusto **AF + AF' = 2q**

AF*AF'=q^2(1-e^2cos^{2}α)= q^2(1-e^2sin^{2}α)

IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO
(Quadratura)

In attesa di trovare la soluzione all'integrale Ellittico di 2ª specie, cerchiamo il perimetro dell'ellisse geometricamente, prendendo in considerazione l'esempio empirico:

«Se schiacciamo un cerchio su due poli contrapposti, questi tenderà ad assumere la forma di una ellisse e più stringo, più l'ellisse si allarga. Notiamo che l'area della circonferenza tende a zero, mentre il suo perimetro rimane costante ed uguale a quello dell'anello iniziale; e quando i due poli si congiungeranno, l'area andrà a zero, ed il Perimetro sarà dato da un semi asse che vale due volte il raggio del cerchio»

Dalla corrispondenza tra ellisse e relativa circonferenza data dal "Teorema dei Pianeti" (vedi su Google pdf o Geo) che oltre alla definizione, ci fornisce la dimostrazione algebrica di un sistema di primo grado a due incognite: noti due valori (q,m) ne esistono altri due, tali che:

$$\begin{cases}(R+r)=q\\(R-r)=m\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}2R=(R+r)+(R-r)=(q+m)\\2r=(R+r)-(R-r)=(q-m)\end{cases} \qquad 4Rr=(q^2-m^2)=c^2 \qquad \mathbf{1)}$$

dove c=distanza Focale, R e r raggi di circonferenza e q>m semi assi dell'ellissi corrispondenti ottenute dallo schiacciamento, secondo l'esempio empirico, come abbiamo in Fig.9b.

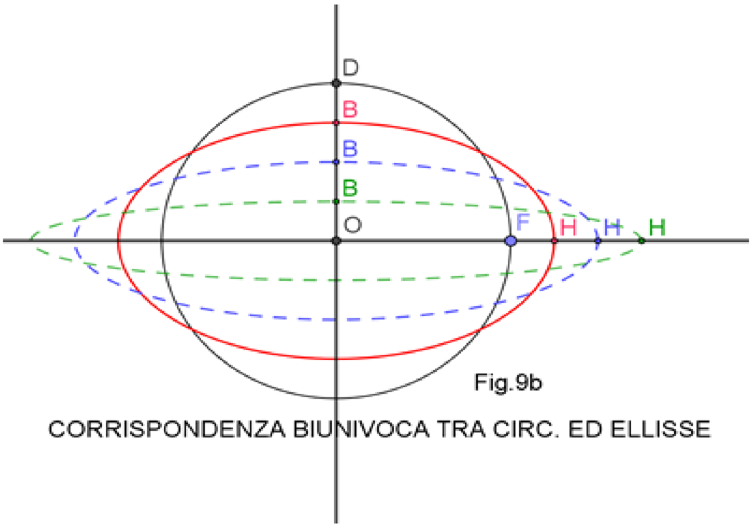


Fig.9b
CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA CIRC. ED ELLISSE

OD=OF=R=(q+m)/2; OH=(R+r)=q=Asse Maggiore;
BD=FH=r=(q-m)/2; OB=(R-r)=m=Asse Minore. Per m=0 2R=q.

Si osservi che il Perimetro rimane sempre quello del cerchio di partenza:

$$2R\pi=(q_x+m_x)\pi$$

si forma così una famiglia di ellissi di uguale perimetro.

Ciò significa che comprimendo la circonferenza ai poli, al cerchio di raggio R corrisponderà una serie di ellissi con la somma degli assi costante, secondo la formula:

$$2R = (q + m) = [(q + \mu) + (m - \mu)] \quad \text{per } \mu \in (0,m)$$

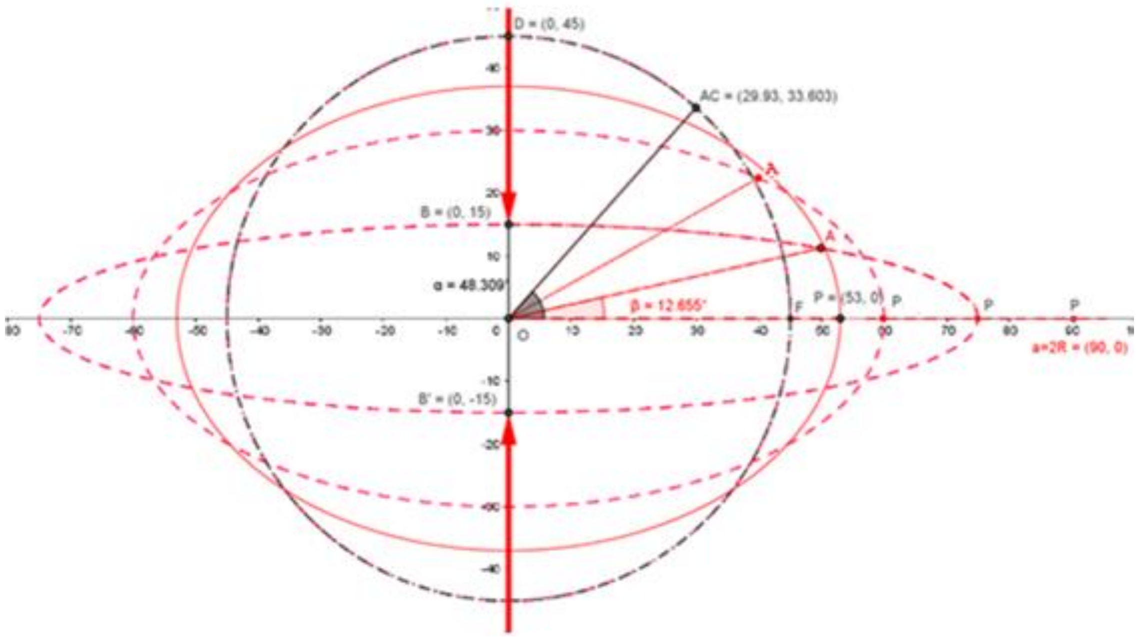
dove gli assi saranno:

$(q + \mu)$=asse maggiore $\qquad (m - \mu)$=asse minore

per $(m = \mu)$ $\quad (q + m)$=asse maggiore $\qquad (0)$=asse minore

quindi $\qquad 2R = (q + m)$

Dall’applet: PERIMETRO ELLISSI E CERCHIO.
Vediamo il grafico e analizziamolo.



Dalla l’ellisse (in ROSSO) di partenza, di assi (q=53 e m=37) si ottiene la circonferenza di raggio (q+m)=2R (in NERO) che stretta ai poli descrive le ellissi indicate (in rosso a tratti).

Ad un Punto A della ellisse in rosso, di angolo β, esiste nella circonferenza, il corrispettivo punto A_C di angolo α (in nero); ma alle ellissi date dallo schiacciamento, ai vari punti A, corrisponde lo stesso punto A_C e il suo angolo (α) eguale per tutte le ellissi, giusto a mostrare la corrispondenza che esiste tra tutte le ellissi e la circonferenza, data dalla formula

$$tan(\beta) = \frac{(m - \mu)}{(q + \mu)}\, tan(\alpha)$$

Invece al muoversi del punto A sull’arco dell’ellisse, anche il punto A_C si muoverà, coincidendo con A solo per β=0 o β=90°.
Per μ=m allo schiacciamento totale, si ha il risultato di
2R=(q+μ)+(m−μ)=(q+m)+(0) e nell’applet 2R=(53+37)+(0)=90 R=45.

(Nel Cap.IIIBis "PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL'ELLISSE" avevamo scritto $\overline{SA}^2 = \left(\frac{m^2}{q}\cos\alpha\right)^2 + (m\sin\alpha)^2$ da cui $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m}\overline{SA}$ dove per α=0 e $\alpha=\frac{\pi}{2}$ abbiamo $\frac{ds}{d\alpha} = m$ e $\frac{ds}{d\alpha} = q$).

Ora ispirandoci al "TEOREMA DEI PIANETI" dalla **1]** Pag.12) si ha:

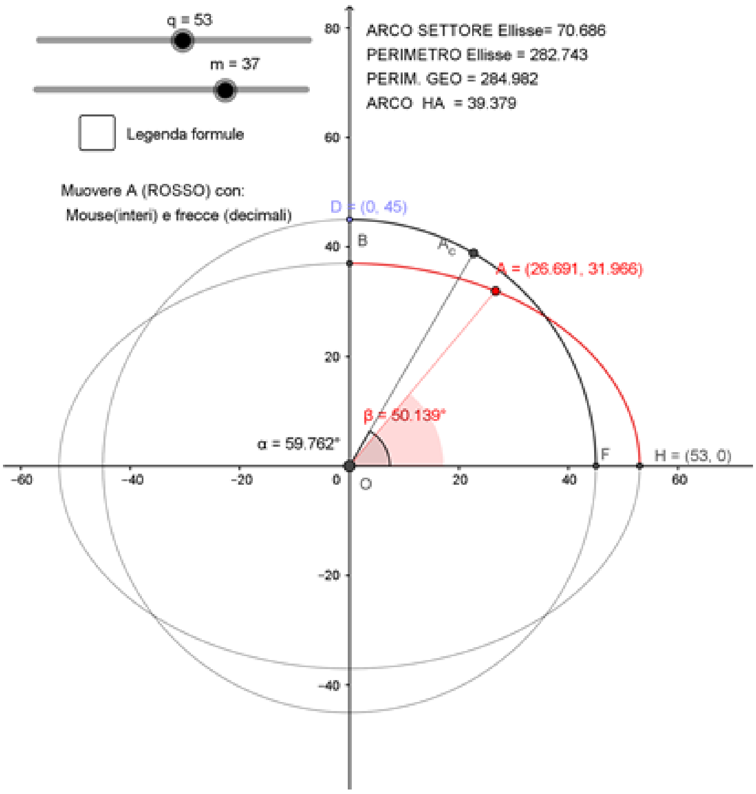
$$\left.\begin{cases} \text{per } \alpha = 0 \;\; sar\grave{a} \;\; \sqrt{(R-r)^2} = \sqrt{m^2} = m \\ \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2} \; sar\grave{a} \;\; \sqrt{(R+r)^2} = \sqrt{q^2} = q \end{cases}\right\} 2R = (q+m)$$

che stabilendo la corrispondenza tra ellisse e circonferenza danno uguali il perimetro dei rispettivi quadranti per:

$$R\frac{\pi}{2} = \frac{(q+m)}{2}\frac{\pi}{2}$$

Ma vediamo quali sono i valori degli archi corrispondenti dall'applet:

ARCO ELLISSE E CERCHIO



Nel quadrante, per l'esempio empirico mostrato, i vari archi determinati dal punto A dell'ellisse sono corrispondenti agli archi del punto A_C sulla circonferenza, ma *diversi* in valore ed uguali solo, come visto per β=0 e β=90°.

Il rapporto che lega l’angolo β dell’ellisse e l’angolo α della circonferenza è dato sempre da $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$, mentre l’arco dell’ellisse corrispondente all’arco del cerchio, ma non eguale per valore è determinato da una relazione che (per una ellisse con asse-maggiore q posto sull’ascissa) è dato dalla formula di rettificazione dell’integrale ellittico:

$$HA = \left[\frac{Integrale\ ellittico}{2} + \frac{X}{2}\right]\alpha^R$$

che possiamo indicare nelle sue varie forme:

$$HA = \left[\frac{\sqrt{q^2 - c^2\cos^2\alpha}}{2} + \frac{m}{2}\right]\alpha^R \qquad c^2 = q^2 - m^2$$

$$HA = \left[\frac{\sqrt{q^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}}{2} + \frac{m}{2}\right]\alpha^R$$

$$HA = \left[\frac{\sqrt{(R+r)^2\sin^2\alpha + (R-r)^2\cos^2\alpha}}{2} + \frac{(R-r)}{2}\right]\alpha^R$$

$$HA = \left[\frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(2\alpha)}}{2} + \frac{(R-r)}{2}\right]\alpha^R$$

Riassumiamo!

a) l'area dell'ellisse e' uguale all'area della corona circolare data dalle due circonferenze;

b) la relazione che lega l'angolo dell'ellissi e delle circonferenze e' data da $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha = \frac{R-r}{R+r}\tan\alpha$

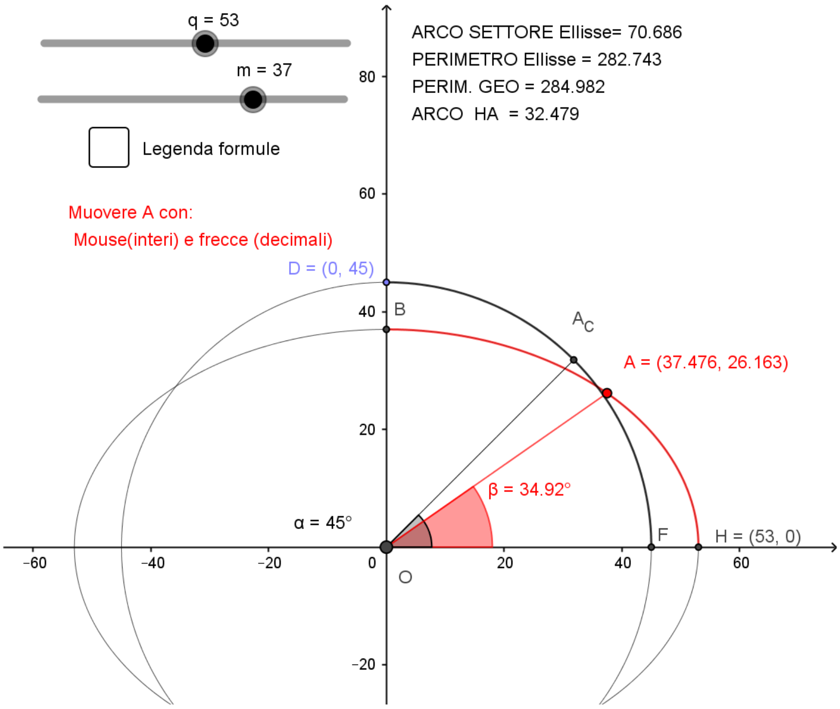
c) mediante l'angolo α della circonferenza e' possibile calcolare il perimetro dell'ellisse e il relativo angolo β (o viceversa), sapendo che il perimetro del quadrante dell'ellissi sono uguali a quello della circonferenza maggiore

$$\left(R\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{q+m}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \left(\frac{(q+\mu)}{2} + \frac{(m+\mu)}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

d) gli archi dell’Ellisse e della Circonferenza sono uguali solo per α=π/2 (per settori), non per valori di archi intermedi.

ESEMPIO4: ARCO D'ELLISSE

Sia una Ellisse di assi (q = 53; m = 37) e la circonferenza



corrispondente di raggio $R = \frac{(q+m)}{2} = 45$ e ricordando il loro legame $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$, si voglia l'arco di ellisse di angolo:

$\tan\beta = \frac{A_X}{A_Y} = \frac{26{,}163}{37{,}476} = 0{,}698;$ $\beta = 34{,}92°$ $\beta^R = 0{,}609^R$ (Angolo di HA della figura) che corrisponde ad α dell'arco FA_C della circonferenza mediante:

$$\frac{53}{37}\tan\beta = \tan\alpha = 0{,}999837838 \qquad \alpha = 44{,}998° = 45° \qquad \alpha^R = 0{,}698^R$$

Allora l'Arco alla circonferenza vale FA_C = 47,426 e l'arco corrispondente dell'ellisse è dato dalle formule viste:

$$HA = \left[\frac{\sqrt{53^2 - c^2\cos^2 45°}}{2} + \frac{37}{2}\right]0{,}698^R = 32{,}479$$

$$HA = \left[\frac{\sqrt{(R+r)^2\,0{,}5 + (R-r)^2\,0{,}5}}{2} + \frac{(R-r)}{2}\right]0{,}698^R = 32{,}479$$

con $c^2 = 53^2 - 37^2$ e (R+r)=q, (R-r)=m

Qualora si volesse il valore dell'arco sotteso a:
$\beta \in (34{,}92°\,;\,90°)$ ed il corrispettivo $\alpha \in (45°\,;\,90°)$
basta sottrarre i valori degli archi trovati al proprio settore:

Per $\beta = 90°$ e $\alpha = 90°$ avremo per entrambi: **ARCO SETTORE=70,686.**
L'arco richiesto sarà:

Arco = 70,686-32,479=38,207 (Arco AB della figura) Ellisse;
Arco = 70,686-47,426=23,260 (Arco $A_C D$ della figura) Circonferenza.

Raccogliamo:

Angolo circonferenza α	Angolo Ellisse β	Area Ell. e cor.Circolare	Arco Ellisse	Arco Circ. R= (q+m)/2
0° ----> 45°	0°---> 34,92	1540,166	32,479	35,343
45°----> 90°	34,92--> 90°	1540,166	38,207	"
0° ----> 90°	0°---->90°	3080.332	70,686	70,686

E' possibile calcolare l'arco di ellisse utilizzando il programma da cui la figura:
ARCO ELLISSE E CERCHIO