III. LE CURVE

CIRCONFERENZA

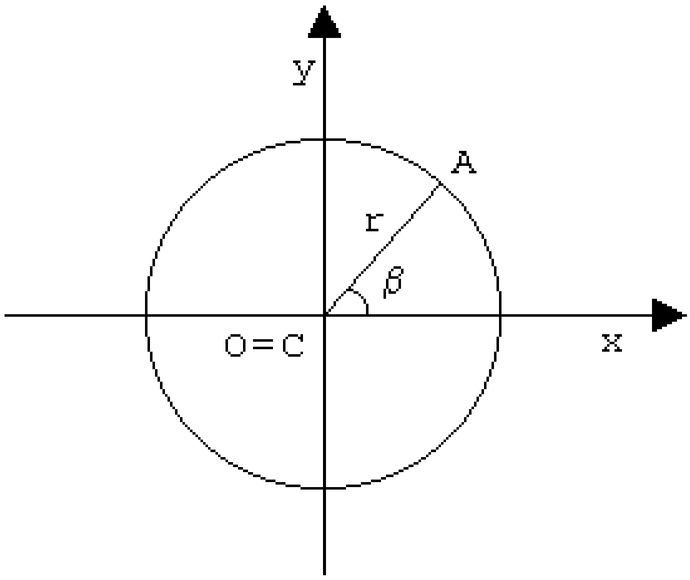
Sia un qualunque valore $r \in R^+$,per un qualunque valore di di un angolo α :

$$r\cos\alpha = x \quad con \ \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$$
$$r\,\text{sen}\,\alpha = y$$

quadrando e sommando sarà $r^2 = x^2 + y^2$.
Stante le due condizioni fondamentali di una Eq. di Vag potrò scrivere:

$x \cos \alpha + y \, sen \, \alpha = r$

In un qualunque ordinamento cartesiano(ortogonale) r rappresenta la distanza di un punto A(x,y) dall'origine con l'angolo $\alpha = \beta$ e quindi la circonferenza generale con centro nell'origine:



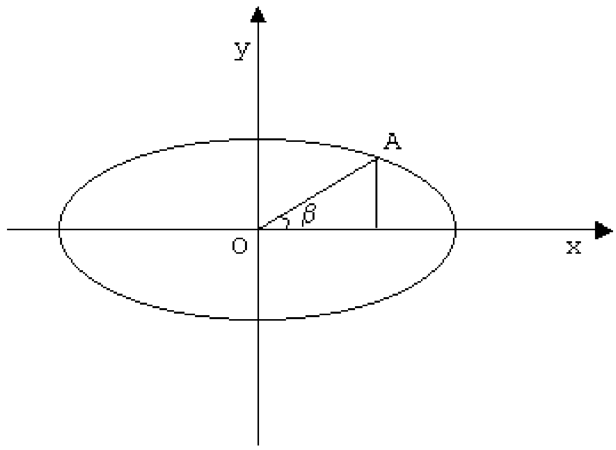
$x \cos \beta + y \, sen \, \beta = r$

ELLISSE

Siano due qualunque valori m ∈ R^+ e q ∈ R^+ per un qualunque angolo α tale che sia:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha_1 = 1 \quad \text{cioè} \quad \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Si imponga: $\begin{cases} q\cos\alpha = x \\ m\,\text{sen}\,\alpha = y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} mq\cos\alpha = mx \\ mq\,\text{sen}\,\alpha = qy \end{cases}$



quadrando e sommando:
$m^2q^2 = m^2x^2 + q^2y^2$ eq. che fornisce i punti di una ellisse essendo:

$$mq = mx\cos\alpha + qy\,\text{sen}\alpha \quad \text{Eq.di Vag}$$

Se x ed y rappresentano le coordinate di un punto A in un qualunque ordinamento cartesiano (ortogonale) avrò che:

$x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta = \left|\overline{OA}\right|$

e' l'equazione di Vag del punto A, pertanto: $\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x = q\cos\alpha \\ \overline{OA}\operatorname{sen}\beta = y = m\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

$$\left|\overline{OA}\right| = \left|\sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha}\right| = q\left|\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{m^2}{q^2}sen^2\alpha}\right| = q\left|\sqrt{(1-e^2 sen^2\alpha)}\right|$$

dove l'ultimo membro integrato $s = \int_0^{\pi/2} q\left|\sqrt{(1-e^2 sen^2\alpha)}\right| d\alpha$, è l'Integrale ellittico di secondo grado.

Allora: $x \cos \beta + y \operatorname{sen} \beta = \left|\sqrt{q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}\right|$

è ancora una Ellisse mediante la sua distanza dall'origine O.

Inoltre: $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha = \sqrt{1-e^2}\,\tan\alpha$

Vediamo ora le equazioni polari dell'Ellisse:

$$\overline{OA}^2 = q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha = q^2\cos^2\alpha + m^2 - m^2\cos^2\alpha = (q^2 - m^2)\cos^2\alpha + m^2$$

$$ma \quad (q^2 - m^2) = e^2 q^2$$

1] $\overline{OA}^2 - e^2 q^2 \cos^2\alpha = m^2 \qquad (\overline{OA}^2 - e^2\,\overline{OA}^2\cos^2\beta) = m^2 \qquad \overline{OA}^2(1 - e^2\cos^2\beta) = m^2$

$$\overline{OA}^2 = \frac{m^2}{(1-e^2\cos^2\beta)} \qquad \overline{OA} = \frac{m}{\sqrt{(1-e^2\cos^2\beta)}}$$

2] dalla equazione per punti della ellisse $m^2x^2 \pm q^2y^2 = m^2q^2$
sostituendo $x = \overline{OA}\cos\beta$ e $y = \overline{OA}\sin\beta$ si avrà

$$\overline{OA}^2 (m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta) = m^2q^2 \qquad \overline{OA} = \frac{mq}{\sqrt{m^2\cos^2\beta \pm q^2\sin^2\beta}}$$

dove per + Ellisse e per - Iperbole

ELLISSE:

$$\overline{OA}^2(m^2\cos^2\beta + q^2\sin^2\beta) = m^2q^2 \qquad \overline{OA}^2 = \frac{m^2q^2}{(m^2\cos^2\beta + q^2 - q^2\cos^2\beta)}$$

$$\overline{OA}^2 = \frac{m^2}{1-e^2\cos^2\beta} \qquad \overline{OA} = \frac{m}{\sqrt{1-e^2\cos^2\beta}} \qquad con \quad e^2 = \frac{q^2-m^2}{q^2}$$

IPERBOLE:

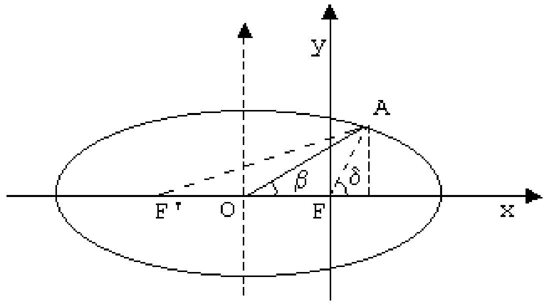
$$\overline{OA}^2(m^2\cos^2\beta - q^2\sin^2\beta) = m^2q^2 \qquad \overline{OA}^2 = \frac{m^2q^2}{(m^2\cos^2\beta - q^2 + q^2\cos^2\beta)}$$

$$\overline{OA}^2 = \frac{m^2}{-1+e^2\cos^2\beta} \qquad \overline{OA} = \frac{m}{\sqrt{e^2\cos^2\beta - 1}} \qquad con \quad e^2 = \frac{m^2+q^2}{q^2}$$

ELLISSE (FUOCO)

Allorquando di una Ellisse si volesse le coordinate non rispetto ad un riferimento O(centro dell'Ellisse) ma rispetto ad un punto F:

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OA}\mathrm{sen}\beta = m\mathrm{sen}\alpha \end{cases}$$



da cui abbiamo:

$$\begin{cases} \overline{FA}\cos\delta = \overline{OA}\cos\beta - \overline{OF} = q\cos\alpha - \overline{OF} = x \\ \overline{FA}\mathrm{sen}\delta = \overline{OA}\mathrm{sen}\beta = m\mathrm{sen}\alpha = y \end{cases}$$

$$\tan\delta = \frac{m\sin\alpha}{q\cos\alpha - \overline{OF}}$$

Come sempre nel ricavare δ bisogna tener presente i segni del NUMERATORE e del DENOMINATORE,affinché il valore dell'angolo cada nel giusto QUADRANTE.

$$\overline{FA}^2 = q^2\cos^2\alpha + m^2 sen^2\alpha + \overline{OF}^2 - 2\overline{OF}q\cos\alpha =$$
$$= (q^2 - m^2)\cos^2\alpha + m^2 + \overline{OF}^2 - 2\overline{OF}q\cos\alpha \qquad *)$$

Il valore OF rappresenta in generale il valore dello spostamento del riferimento cartesiano da O a F, ma può assumere particolare significato.

Se tra i tanti valori che OF può assumere abbiamo $\overline{OF}^2 = c^2 = q^2 - m^2$ allora c=Distanza-Focale; F=Fuoco dell'Ellisse e il rapporto $c/q = e = Eccentricit\grave{a}$;

e la *) diventa: $\overline{FA}^2 = c^2\cos^2\alpha + q^2 - 2cq\cos\alpha = (q - c\cos\alpha)^2$

$$\overline{FA} = (q - c\cos\alpha) = q(1 - e\cos\alpha) \qquad \begin{cases} (q - c\cos\alpha)\cos\delta = q\cos\alpha - c \\ (q - c\cos\alpha)\sin\delta = m\sin\alpha \end{cases}$$

Da cui: $\tan\delta = \dfrac{m\sin\alpha}{q\cos\alpha - c} = \dfrac{y}{x - c}$ e $\sin\delta = \dfrac{m\sin\alpha}{q - c\cos\alpha} = \dfrac{m/q\ \sin\alpha}{1 - e\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin\alpha}{1 - e\cos\alpha}$ e

$$\cos\delta = \frac{q\cos\alpha - c}{q - c\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha - e}{1 - e\cos\alpha} \quad \text{e anche} \quad \cos\alpha = \frac{\cos\delta + e}{1 + e\cos\delta} \qquad 1)$$

che sostituita in FA mi ritorna la Eq. Polare Classica della Ellisse con Origine nel Fuoco:

$$\overline{FA} = q(1 - e\frac{\cos\delta + e}{1 + e\cos\delta}) = q(1 - \frac{e\cos\delta + e^2}{1 + e\cos\delta}) = q\frac{(1 - e^2)}{1 + e\cos\delta} = q\frac{m^2/q^2}{1 + e\cos\delta} = \frac{m^2}{q(1 + e\cos\delta)}$$

Indichiamo l'equazione dal Fuoco per punti:

$$\begin{cases} x = q\cos\alpha - c \\ y = msen\alpha \end{cases} \begin{cases} (x+c)m = mq\cos\alpha \\ yq = mqsen\alpha \end{cases} ; \quad m^2q^2 = q^2y^2 + m^2(x+c)^2; \quad y = \pm\frac{m}{q}\sqrt{q^2-(x+c)^2}\ ; con\Delta \geq 0$$

Abbiamo visto $\overline{FA} = (q - c\cos\alpha) = q(1 - e\cos\alpha)$, che può anche essere ottenuta mediante il Teorema di Carnot, tenendo presente $\overline{OA}\cos\beta = q\cos\alpha$:

$$\overline{FA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OF}^2 - 2\,\overline{OF}\ \overline{OA}\cos\beta = q^2\cos^2\alpha + m^2sen^2\alpha + \overline{OF}^2 - 2\overline{OF}\ q\cos\alpha =$$

$$= (q^2 - m^2)\cos^2\alpha + \left(m^2 + c^2\right) - 2cq\cos\alpha = c^2\cos^2\alpha + q^2 - 2cq\cos\alpha = (q - c\cos\alpha)^2$$

cioè $\overline{FA} = (q - c\cos\alpha) = q(1 - e\cos\alpha)$

analogamente $\overline{F'A} = (q + c\cos\alpha) = q(1 + e\cos\alpha)$

e la loro somma $\overline{FA} + \overline{F'A} = 2q$ costante per un qualunque Punto A.

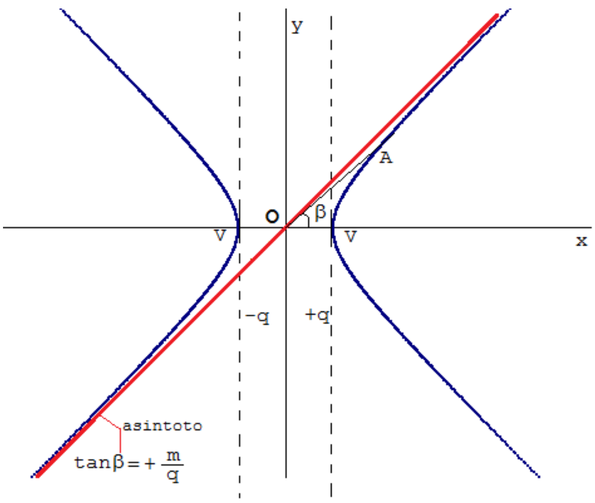
L'equazione Polare della ellisse classica, come la conosciamo, in funzione dell'angolo δ rimane:

$\overline{OA}^2 = \dfrac{m^2}{1 - e^2\cos^2\delta}$ dal Centro e $\overline{FA} = \dfrac{m^2}{q(1 + e\cos\delta)}$ dal Fuoco

IPERBOLE

Siano due valori m ∈ R^+ e q ∈ R^+ per un qualunque angolo α tale che $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha_1=1$ cioè $\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha=1$ e possa imporre:

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{q}{x}\\ \tan\alpha=\dfrac{y}{m}\end{cases}\quad\begin{cases}x\cos\alpha=q\\ m\,\text{sen}\,\alpha=y\cos\alpha\end{cases}\quad\begin{cases}mx\cos\alpha=mq\\ mx\,\text{sen}\,\alpha=yq\end{cases}$$ quadriamo e sommiamo



$m^2x^2=m^2q^2+y^2q^2$ cioè una iperbole con i vertici sull'asse delle ascisse e x asse di simmetria, ma anche una Eq. di Vag $mq\cos\alpha+qy\,\text{sen}\,\alpha=mx$

Anche in questo caso se x ed y rappresentano le coordinate di un punto A in un qualunque riferimento cartesiano (ortogonale) la sua distanza dall'origine O e'data da :

$$\overline{OA}=x\cos\beta+y\,\text{sen}\,\beta$$

$$\begin{cases}\overline{OA}\cos\beta=x=\dfrac{q}{\cos\alpha}\\ \overline{OA}\,\text{sen}\,\beta=y=m\tan\alpha\end{cases}\qquad\left|\overline{OA}\right|=\left|\sqrt{\dfrac{q^2+m^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}\right|$$

$$\tan\beta=\frac{y}{x}=\frac{m\tan\alpha}{\dfrac{q}{\cos\alpha}}=\frac{m}{q}\text{sen}\alpha$$

Allora l'Eq. di Vag:

$$x\cos\beta+y\text{sen}\beta=\sqrt{\frac{q^2+m^2\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{q}{\cos\alpha}\sqrt{1+\frac{m^2}{q^2}\sin^2\alpha}=\frac{q}{\cos\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}=\frac{q}{\cos\alpha}\frac{1}{\cos\beta}$$

e' ancora una Iperbole data dalla distanza di ogni suo punto dal centro O, in un riferimento cartesiano (ortogonale); l'ultima è una nuova espressione dell' Iperbole:

$$\begin{cases}\dfrac{q}{\cos\alpha}\left(\dfrac{1}{\cos\beta}\cos\beta\right)=\dfrac{q}{\cos\alpha}=x\\ \dfrac{q}{\cos\alpha}\tan\beta=y\end{cases}$$

Si osservi che per valori $\begin{cases}\alpha=90\\ \alpha=270\end{cases}$ la tangente avrà $\tan\beta=\pm\dfrac{m}{q}$ (valore minimo di ±β) che e' l'angolo degli asintoti.

Per $\begin{cases}\alpha=0^0\\ \alpha=180^0\end{cases}$ si avra' $y=0$ e $x=\pm q$ per cui i vertici saranno (q,0) e (-q,0).

IPERBOLE EQUILATERA

Per q=m l' equazione $m^2x^2 = m^2q^2 + y^2q^2$ diventa $q^2x^2 = q^4 + y^2q^2$ cioè

$x^2 - y^2 = q^2$ $\quad x^2 = q^2 + y^2$ che essendo un quadrato avremo

$\begin{cases} x\cos\alpha = q \\ x\sin\alpha = y \end{cases}$ $\quad q\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\alpha = x$ dove $x = \dfrac{q}{\cos\alpha}$ *e* $y = q\tan\alpha$

che vale una IPERB. EQUILATERA con Eq. di Vag:

$$x\cos\beta + y\,sen\beta = \left|\sqrt{\frac{q^2(1+sen^2\alpha)}{\cos^2\alpha}}\right| = \frac{q}{\cos\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$$

I valori degli asintoti dell’Iperbole sono: $-\dfrac{m}{q} \le \tan\beta \le \dfrac{m}{q}$

che ora diventano per l’Iperb. Equil: $-1 \le \tan\beta \le 1$ avente per asse di simmetria un asse coordinato.

Nel CAPVI - ROTAZIONE E TRASLAZIONE Pag. 8,9 vedremo come ruotando la Iperbole $x^2 - y^2 = q^2$ di 45° in senso antiorario si ottiene l'Iperbole Equilatera tipo $xy=q^2$ che ha (CAPXIII - L'EQUAZIONE DI VAG E GLI ANGOLI AL CENTRO Pag.2) coordinate $x = \dfrac{\tan 2\beta}{2}$ *e* $y = \dfrac{2q^2}{\tan 2\beta}$ con β angolo al centro.

FUNZIONI IPERBOLICHE

Dall'Iperbole Equilatera si ricavano le funzioni Iperboliche:

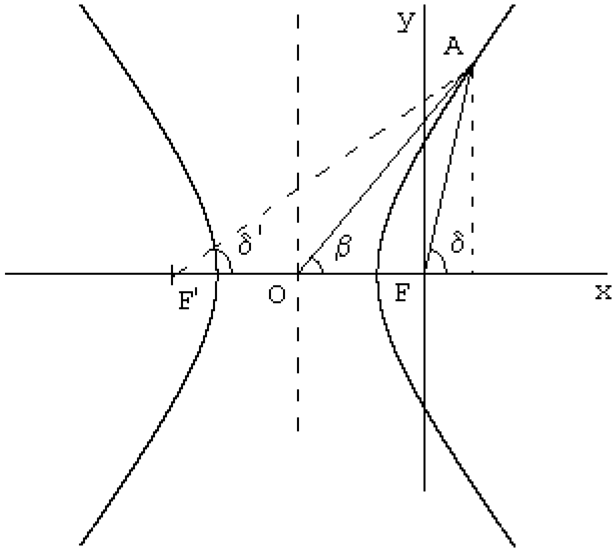
$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

Vediamo quali relazioni esistono tra queste Funzioni e i Parametri utilizzati nella nostra definizione.

$$\begin{cases} q\sinh t = y = q\tan\alpha \\ q\cosh t = x = \dfrac{q}{\cos\alpha} \\ \tanh t = \dfrac{y}{x} = \tan\beta = \sin\alpha \end{cases}$$

Le Funzioni Iperboliche si equivalgono ai Parametri utilizzati nella nostra equazione dell' IPERBOLE EQUILATERA.

IPERBOLE(FUOCO)



OF = distanza focale

$$\overline{OF}^2 = c^2 = q^2 + m^2$$

$$\begin{cases} OA\cos\beta = \dfrac{q}{\cos\alpha} \\ OA\sin\beta = m\tan\alpha \end{cases}$$

avremo

$$\begin{cases} \overline{FA}\cos\delta = \overline{OA}\cos\beta - c = \dfrac{q}{\cos\alpha} - c \\ \overline{FA}\sin\delta = \overline{OA}\sin\beta = \dfrac{m}{\cos\alpha}\sin\alpha \end{cases} \quad 1]$$

$$\tan\delta = \frac{m\sin\alpha}{q - c\cos\alpha} = \frac{m\sin\alpha}{q(1 - e\cos\alpha)}$$

Procediamo come per l'Ellisse:

$$\overline{FA}^2 = \left(\frac{q}{\cos\alpha}\right)^2 + c^2 - 2\left(\frac{q}{\cos\alpha}c\right) + \left(\frac{m}{\cos\alpha}\sin\alpha\right)^2 = \left[q^2 + q^2\cos^2\alpha + m^2\cos^2\alpha - 2qc\cos\alpha + m^2 - m^2\cos^2\alpha\right]\frac{1}{\cos^2\alpha} =$$

$$= \left[(q^2 + m^2) + q^2\cos^2\alpha - 2qc\cos\alpha\right]\frac{1}{\cos^2\alpha} = \left[c^2 + q^2\cos^2\alpha - 2qc\cos\alpha\right]\frac{1}{\cos^2\alpha} = (c - q\cos\alpha)^2\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\overline{FA} = \left(\frac{c}{\cos\alpha} - q\right) = q\left(\frac{e}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{q}{\cos\alpha}(e - \cos\alpha) \qquad \left(e = \frac{c}{q} = \text{eccentricità}\right)$$

Alla stessa maniera si ottiene, l'altro fuoco:

$$\overline{F'A} = \left(\frac{c}{\cos\alpha} + q\right) = \frac{q}{\cos\alpha}(e + \cos\alpha)$$ (cambia solo il segno)

Sottraendo i due abbiamo: $\overline{F'A} - \overline{FA} = 2q$

Considerando che: $\dfrac{m}{\cos\alpha}\sin\alpha = \overline{FA}\sin\delta = \dfrac{q}{\cos\alpha}(e - \cos\alpha)\sin\delta$

si ricava: $m\sin\alpha = q(e - \cos\alpha)\sin\delta$ e quindi $\sin\delta = \dfrac{m\sin\alpha}{q(e - \cos\alpha)}$

da questa e dalla tanδ: $\sin\delta\, q(1 - e\cos\alpha) = m\sin\alpha\cos\delta = q(e - \cos\alpha)\sin\delta\cos\delta$

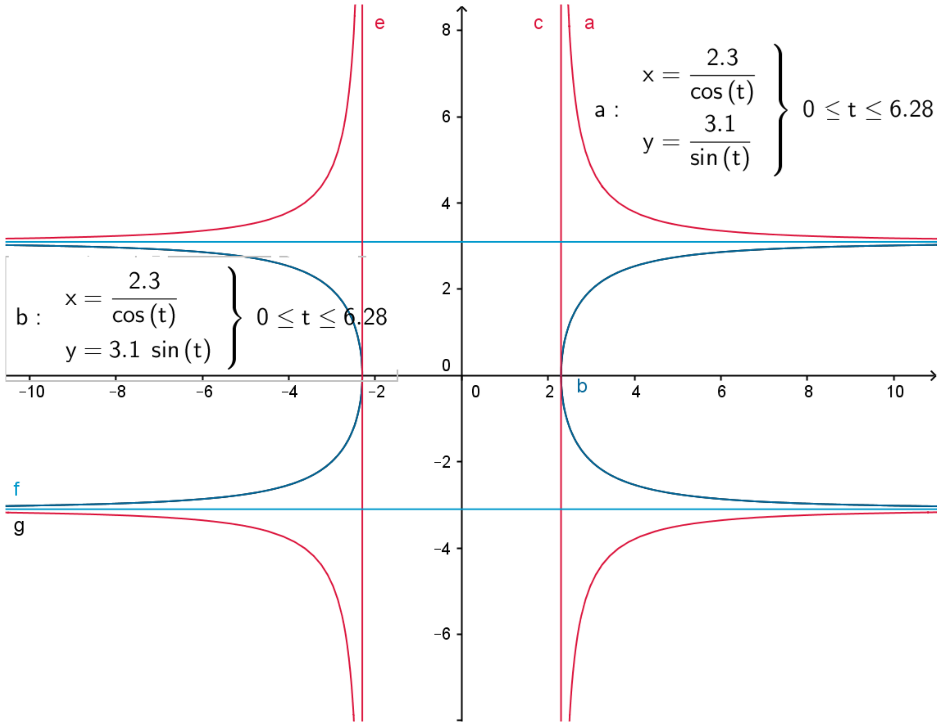
e dal primo e terzo membro:

$$(1 - e\cos\alpha) = (\cos\alpha - e)\cos\delta \qquad \cos\delta = \frac{1 - e\cos\alpha}{e - \cos\alpha} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{1 - e\cos\delta}{e - \cos\delta}$$

Nell' IPERBOLE EQUILATERA(FUOCO) se m=q abbiamo:

$$c = \sqrt{2}\,q\,; \quad e = \frac{c}{q} = \sqrt{2}\,; \quad FA = \frac{q}{\cos\alpha}\left(\sqrt{2} - \cos\alpha\right); \quad \tan\delta = \frac{\sin\alpha}{1 - \sqrt{2}\,\cos\alpha}\,; \quad \cos\delta = \frac{1 - \sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2} - \cos\alpha}$$

IPERBOLI (CON ASINTOTI LE RETTE X=Q E Y=M)



Per valori di α compresi tra 0° e 90°.

a: $\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x = \dfrac{q}{\cos\alpha} \\ \overline{OA}\,\text{sen}\,\beta = y = \dfrac{m}{\text{sen}\,\alpha} \end{cases}$ $\begin{cases} yx\cos\alpha = yq \\ yx\,\text{sen}\,\alpha = xm \end{cases}$ $(yx)^2 = (qy)^2 + (xm)^2$ $\tan\beta = \dfrac{m}{q}\dfrac{1}{\tan\alpha}$

$1 = \dfrac{q^2}{x^2} + \dfrac{m^2}{y^2}$; $\dfrac{1}{m^2q^2} = \dfrac{1}{m^2x^2} + \dfrac{1}{q^2y^2}$ Iperbole avente per asintoti le rette q ed m nella parte rappresentante il primo quadrante.

b: $\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = x = \dfrac{q}{\cos\alpha} \\ \overline{OA}\,\text{sen}\,\beta = y = m\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} mx\cos\alpha = qm \\ mx\,\text{sen}\,\alpha = yx \end{cases}$ $(yx)^2 = (mx)^2 - (qm)^2$

$\tan\beta = \dfrac{m}{q}\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{m}{q}\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

$1 = \dfrac{y^2}{m^2} + \dfrac{q^2}{x^2}$; $\dfrac{1}{q^2y^2} = \dfrac{1}{m^2q^2} + \dfrac{1}{y^2x^2}$ Iperbole con asintoti le rette q ed m nel primo quadrante e compresa tra la retta y=m e l’asse positivo della ascissa.

PARABOLA CON ORIGINE NEL FUOCO

Sia un valore p ∈ R_0^+, si scriva l’Eq. di Vag di tutti i punti P(x,y) che abbiano distanza dall’origine:

$a)\ \overline{OP} = x\cos\beta + ysen\beta = (p \pm y)$ (+aperta in l'alto;-aperta in il basso)

$b)\ \overline{OP} = x\cos\beta + ysen\beta = (p \pm x)$ (+aperta a destra;-aperta a sinistra)

Per la **a)** si avrà: $\begin{cases}(p \pm y)\cos\beta = x \\ (p \pm y)\operatorname{sen}\beta = y\end{cases}$ $(p \pm y)^2 = x^2 + y^2$

sviluppiamo il quadrato: $x^2 = \pm 2py + p^2$

equazione che rappresenta una parabola con il <u>Fuoco nell’Origine.</u>

Da: $(p \pm y)\sin\beta = y$; *abbiamo* $y = \dfrac{psen\beta}{1 \mp sen\beta}$ e l’equazione

$$(p \pm y) = (p \pm \frac{p\operatorname{sen}\beta}{1 \mp \operatorname{sen}\beta}) = (\frac{p}{1 \mp \operatorname{sen}\beta})$$

Da cui l’Eq. di Vag: $x\cos\beta + y\operatorname{sen}\beta = \dfrac{p}{1 \mp \operatorname{sen}\beta} = (p \pm y)$

ed i valori relativi: $\begin{cases} y = \dfrac{p}{1 \mp \operatorname{sen}\beta}\operatorname{sen}\beta \\ x = \dfrac{p}{1 \mp \operatorname{sen}\beta}\cos\beta \end{cases}$

Per la b) sarà analogamente: $x\cos\beta + y\operatorname{sen}\beta = \dfrac{p}{1 \mp \cos\beta} = (p \pm x)$

Le espressioni: $\dfrac{p}{1 \mp \cos\beta}$ e $\dfrac{p}{1 \mp \operatorname{sen}\beta}$

se con orientamento dell’asse x opposto, sono le eq.polari della parabola, che meglio risolvono l’Eq. di Vag poiche’ conservano la caratteristica dell’eq. parametriche in quanto in funzione dell’angolo β. In seguito vedremo come è possibile avere l’Eq. di Vag di una Parabola mediante valori parametrici dedotti da una circonferenza.

RIASSUNTO

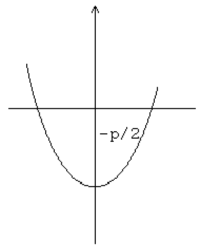
Dalla equazione canonica di una parabola con il Fuoco nell'Origine:

$$\begin{cases} y^2 = \pm 2px + p^2 \quad e \ per \ y = 0 \ \ \Rightarrow p = \pm 2x \\ x^2 = \pm 2py + p^2 \quad e \ per \ x = 0 \ \ \Rightarrow p = \pm 2y \end{cases}$$

quindi i valori delle coordinate (x,y) di una parabola con l'Origine nel fuoco saranno $(-\frac{p}{2} \Rightarrow +\infty)$ *oppure* $(+\frac{p}{2} \Rightarrow -\infty)$:

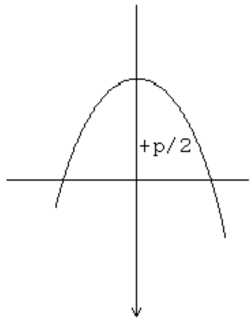
$\frac{p}{2} \leq (p + y) = \frac{p}{1 - \text{sen}\,\beta}$ aperta in alto

per $y \geq -\frac{p}{2}$



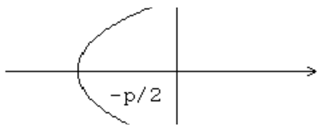
$\frac{p}{2} \leq (p - y) = \frac{p}{1 + \text{sen}\,\beta}$ aperta in basso

per $y \leq +\frac{p}{2}$



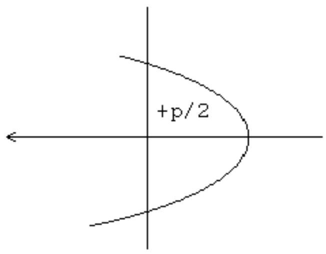
$\frac{p}{2} \leq (p + x) = \frac{p}{1 - \cos\beta}$ aperta a destra

per $x \geq -\frac{p}{2}$



$\frac{p}{2} \leq (p - x) = \frac{p}{1 + \cos\beta}$ aperta a sinistra

per $x \leq +\frac{p}{2}$



RIASSUNTO CAPITOLO

Dall' Eq. Di Vag $x\cos\beta + y\,\text{sen}\,\beta = d$ che e' tale se:

$$\begin{cases} d\cos\beta = x & |d| = \sqrt{x^2+y^2} \\ d\,\text{sen}\,\beta = y & \cos^2\beta + \text{sen}^2 = 1 \end{cases}$$

e se tali condizioni non sussistono essa e' una Eguaglianza.
Pertanto:

a) β = costante — retta di angolo β

b) β = variabile

1) d = costante — circonferenza

2) d = $\sqrt{q^2\cos^2\alpha + m^2\,\text{sen}^2\,\alpha}$ — Ellisse

3) d = $\sqrt{\dfrac{q^2 + m^2\,\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}$ — Iperbole

4) d = $(p \pm y) = \dfrac{p}{1 \mp \text{sen}\,\beta}$ — Parabola (aperta: in alto; in basso)

5) d $= (p \pm x) = \dfrac{p}{1 \mp \cos\beta}$ — Parabola (aperta: a destra; a sinistra)

IL COEFFICENTE ANGOLARE

Sappiamo che il coefficiente angolare della tangente in un punto a una curva è dato dalla sua derivata.
In particolare nell’Eq. di Vag esso è dato come rapporto di una funzione implicita.
Infatti poiché nell’Eq. di Vag le coordinate di ogni punto sono generalmente date da una funzione che ha per variabile un angolo del tipo:

$$\begin{cases} x = f(\alpha_1) \\ y = g(\alpha_2) \end{cases}$$

con α_1 e α_2 valori degli angoli Parametrici (nelle figure viste abbiamo trattato questi valori con la condizione $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 = 1$ semplificato in $\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 = 1$)

Ora il valore del loro rapporto incrementale è dato da:

$$tan\,\rho = \frac{\dfrac{dy}{d\alpha_2}}{\dfrac{dx}{d\alpha_1}} = \frac{dy}{dx}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}$$

L’espressione $tan\,\rho = \frac{dy}{dx}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}$ può rappresentare il valore di una tangente ma quello che noi indichiamo come coefficiente angolare, nella letteratura corrente, è $tan\,\rho = \frac{dy}{dx}$.

L’espressione $tan\,\rho = \frac{dy}{dx}$ rappresenta l’angolo di una tangente con l’asse dell’ascissa in un punto di una curva solo se $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = 1$ e questo avviene solo quando vi è una qualunque relazione che leghi le variabili α_1 e α_2, tale che il valore di una possa essere cambiato con l’altra.
Con la condizione $cos^2\alpha_1 + cos^2\alpha_2 = 1$ (*e quindi* $cos\,\alpha_1 = sen\,\alpha_2$) la possibilità di questo scambio sussiste e le coordinate x e y sono espresse mediante uno degli angoli α_1 (oppure α_2) e pertanto si avrà che x=f(α_1) y=g(α_1) per cui $\tan\rho = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_1}$ dove $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_1} = 1$.

Diversamente risolviamo questo problema ponendo la relazione tipica dell’Eq. di Vag $cos^2\alpha_1 + cos^2\alpha_2 = d$ con 0<d<2 (è evidente che per d uguale a 0 oppure a 2 si hanno due punti);comunque avremo sempre

$cos^2\alpha_2 = d - cos^2\alpha_1$ per cui $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2}$ diventa $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_1}$ e $tan\rho = \frac{dy}{dx}$ risulta essere il coefficiente angolare della tangente.

Se non posso porre la condizione $cos^2\alpha_1 + cos^2\alpha_2 = d$ dovrò cercare qual' è la relazione tra α_1 e α_2. Per fare un esempio la relazione potrebbe essere $\alpha_2 = 2\alpha_1$ e in una Eq. di Vag si avrebbe:

$$\begin{cases} x = f(\alpha_1) = \cos\alpha_1 \\ y = g(\alpha_2) = \cos\alpha_2 = g(2\alpha_1) = \cos 2\alpha_1 \end{cases}$$

dove $\cos 2\alpha_1 = (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1)$ quindi: $\begin{cases} \frac{dx}{d\alpha_1} = -sen\alpha_1 \\ \frac{dy}{d\alpha_1} = (\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha)' = -4\cos\alpha_1 sen\alpha_1 \end{cases}$

$$\tan\rho = \frac{dy}{dx}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_1} = \frac{4sen\alpha_1\cos\alpha_1}{sen\alpha_1} = 4\cos\alpha_1 .$$

Ponendo invece $cos^2\alpha_1 + cos^2\alpha_2 = 1$ e $cos\alpha_2 = sen\alpha_1$ avrei ottenuto

$$\tan\rho = \frac{dy}{dz} = \frac{\frac{dy}{d\alpha_1}}{\frac{dx}{d\alpha_1}} = \frac{dy}{dx} == \frac{\cos\alpha_1}{-\sin\alpha_1} = -\frac{1}{\tan\alpha_1} .$$

SENZA NESSUNA RELAZIONE TRA GLI ANGOLI SI AVREBBE:

$$\tan\rho = \frac{dy}{dx}\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = \frac{sen\alpha_2}{sen\alpha_1}$$

TANGENTI (DERIVATE)

Circonferenza ($\alpha = angolo\ al\ centro; \overline{OA} = R$)

$$y = \overline{OA} sen\alpha \quad \frac{dy}{d\alpha} = \overline{OA}\cos\alpha$$

$$x = \overline{OA}\cos\beta\alpha \quad \frac{dx}{d\alpha} = -\overline{OA} sen\alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\rho_C = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Ellisse $\beta = angolo\ al\ centro$; :

$$y = msen\alpha; \quad \frac{dy}{d\alpha} = m\cos\alpha \qquad x = q\cos\alpha; \quad \frac{dx}{d\alpha} = -qsen\alpha$$

$$\frac{y}{x} = \tan\beta = +\frac{m}{q}\tan\alpha; \qquad \frac{dy}{dx} = \tan\rho_{EL} = -\left(\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha}\right) = -\left(\frac{m^2}{q^2}\frac{1}{\tan\beta}\right) = \frac{m}{q}\tan\rho_C$$

Iperbole $\beta = angolo\ al\ centro$:

$$y = m\tan\alpha; \quad \frac{dy}{d\alpha} = \frac{m}{\cos^2\alpha} \qquad x = \frac{q}{\cos\alpha}; \quad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{qsen\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{y}{x} = \tan\beta = \frac{m}{q}\sin\alpha; \qquad \frac{dy}{dx} = \tan\rho = \frac{m}{q}\frac{1}{sen\alpha} = \frac{m^2}{q^2}\frac{1}{\tan\beta}$$

Parabola 1°) $\beta = angolo\ al\ centro$; (p+y) aperta in alto:

$$y = \frac{p}{1 - sen\ \beta} sen\ \beta \qquad \frac{dy}{d\beta} = \frac{p\cos\beta(1 - sen\ \beta) + p\ sen\ \beta\cos\beta}{(1 - sen\ \beta)^2}$$

$$x = \frac{p}{1 - sen\ \beta}\cos\beta \qquad \frac{dx}{d\beta} = \frac{-p\ sen\ \beta(1 - sen\ \beta) + p\cos\beta\cos\beta}{(1 - sen\ \beta)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\beta}{1 - sen\ \beta} = \frac{x}{p}$$

Parabola 2°) (p-y) aperta in basso:

$$y = \frac{p}{1 + sen\ \beta} sen\ \beta$$

$$x = \frac{p}{1 + sen\ \beta} cos\ \beta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p\ cos\ \beta(1 + sen\ \beta) - p\ sen\ \beta\ cos\ \beta}{-p\ sen\ \beta(1 + sen\ \beta) - p\ cos\ \beta\ cos\ \beta} = -\frac{cos\ \beta}{1 + sen\ \beta} = -\frac{x}{p}$$

Parabola 1b) (p+x) aperta a destra:

$$y = \frac{p}{1 - \cos\beta} sen\beta$$

$$x = \frac{p}{1 - \cos\beta} \cos\beta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p\cos\beta(1-\cos\beta) - psen\beta \sin\beta}{-psen\beta(1-\cos\beta) - p\cos\beta sen\beta} = \frac{1-\cos\beta}{sen\beta} = \frac{p}{y}$$

Parabola 2b) (p-x) aperta a sinistra:

$$y = \frac{p}{1 + cos\ \beta} sen\ \beta$$

$$x = \frac{p}{1 + cos\ \beta} cos\ \beta$$

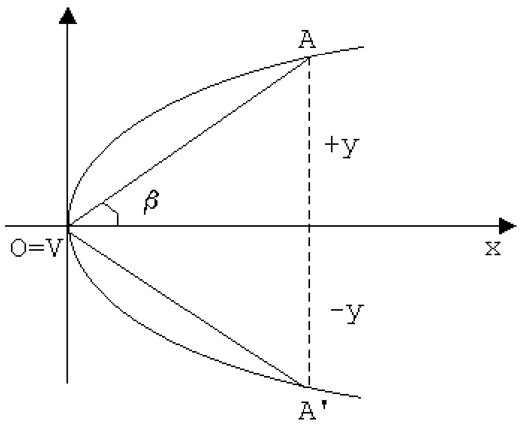
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + cos\ \beta}{sen\ \beta} = -\frac{p}{y}$$

CASO DELLA PARABOLA CON VERTICE NELL'ORIGINE

Anche se in questo contesto è usata l'Eq. di Vag della Parabola con il fuoco nell'Origine, è importante accennare alle caratteristiche della parabola con il vertice nell'origine, la cui equazione generale sappiamo essere:

$y^2=2px$ dove p è il parametro della parabola e x l'asse di simmetria della stessa.

Il modo più semplice per scrivere questa Parabola mediante una Eq. di Vag è:



$$\overline{VA}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 2px$$

$$\begin{cases} \left|\sqrt{x^2+2px}\right| \cos\beta = x \\ \left|\sqrt{x^2+2px}\right| sen\beta = y \end{cases}$$

Il valore $|(2px)|$ è sempre positivo, quindi x e p dovranno avere sempre lo stesso segno(infatti la Parabola presenterebbe la concavità invertita verso i valori negativi di x).

I doppi valori di y sono dati dai valori di 0°≤ β ≤90° e 270°≤ β ≤360° nel caso in figura con apertura verso destra e da 90°≤ β ≤180° e 180°≤ β ≤270° nel caso della concavità invertita.

Risolviamo con l'equazione di Vag l' espressione vista sopra:

$$\left|\sqrt{x^2+2px}\right|^2 \cos^2\beta = x^2 \qquad x^2\cos^2\beta + 2px\cos^2\beta = x^2 \qquad x^2\sin^2\beta = 2px\cos^2\beta \qquad x = \frac{2p}{\tan^2\beta}$$

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = \dfrac{2p}{\tan^2\beta} = x \\ \overline{OA}\sin\beta = \dfrac{x}{\cos\beta}\sin\beta = \dfrac{2p}{\tan\beta} = y \end{cases}$$

$$\left|\overline{OA}\right| = \left|\sqrt{\left(\frac{2p}{\tan^2\beta}\right)^2 + \left(\frac{2p}{\tan\beta}\right)^2}\right| = \left|\sqrt{\frac{(2p)^2+(2p)^2\tan^2\beta}{\tan^4\beta}}\right| = \left|\frac{2p}{\tan^2\beta}\frac{1}{\cos\beta}\right| = \left|\frac{2p\cos\beta}{\sin^2\beta}\right|$$

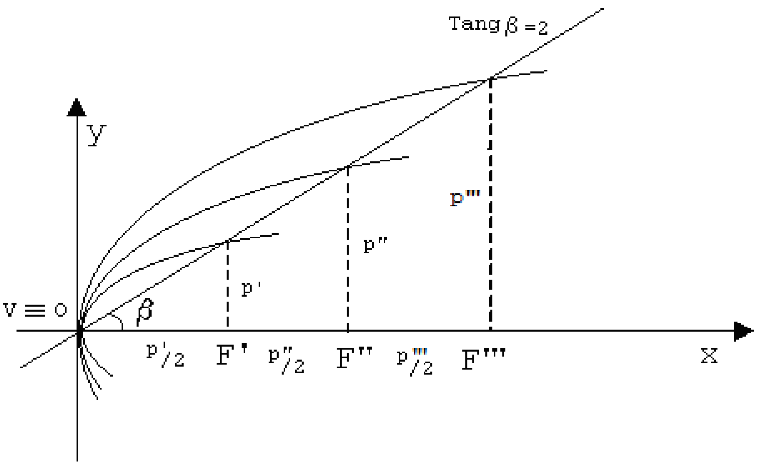
Qualora la Parabola fosse data da $x^2=2py$ le concavità sarebbero verso l'alto e verso il basso con le stesse modalità di sviluppo viste nella dimostrazione sopra:

$$\left|\sqrt{y^2+2py}\right|^2 \sin^2\beta = y^2 \qquad y^2\sin^2\beta + 2py\sin^2\beta = y^2 \qquad y^2\cos^2\beta = 2py\sin^2\beta \qquad y = 2p\tan^2\beta$$

$$\begin{cases} \overline{OA}\cos\beta = 2p\tan\beta = x \\ \overline{OA}\sin\beta = 2p\tan^2\beta = y \end{cases}$$

$$\left|\overline{OA}\right| = \left|\sqrt{(2p\tan\beta)^2 + (2p\tan^2\beta)^2}\right| = \left|\sqrt{2p^2\ \tan^2\beta(1-\tan^2\beta)}\right| = \left|\frac{2p\tan\beta}{\cos\beta}\right| = \left|\frac{2p\sin\beta}{\cos^2\beta}\right|$$

Nella parabola $y^2=2px$, con il Vertice nell’Origine è da osservare che la retta di angolo β e valore Tan β = 2 è la retta che contiene gli estremi delle ordinate dei Fuochi di tutte le parabole i cui vertici coincidono (vedi figura sotto).Infatti se la distanza tra vertice e fuoco è $x=\frac{p}{2}$, il valore dell’Ordinata risulta essere $y=\sqrt{2p\frac{p}{2}}=p$; per cui: $\frac{y}{x}=\tan\beta=2$ $e\ per$ $\sqrt{p^2+\frac{p^2}{4}}=\frac{p}{2}\sqrt{5}$ $sarà$ $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $sen\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\beta=63{,}434949$



e per la parabola $x^2=2py$ (concavità alto e basso) la distanza Vertice Fuoco è $y=\frac{p}{2}$ quindi x=p per cui

$\frac{y}{x}=\tan\beta=\frac{1}{2}$ $e\ per$ $\sqrt{p^2+\frac{p^2}{4}}=\frac{p}{2}\sqrt{5}$ $sarà$ $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ $sen\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\beta=26{,}565051$

RIDEFINIZIONE DELLA PARABOLA

Nella Geometria Parametrica in un riferimento cartesiano (ortogonale), il luogo geometrico dei punti che distano dall'origine la somma algebrica di una costante p($p \in R^+$) ed una coordinata di tali punti, cioè:

($p \pm y$) (aperta verso +l'alto, -in basso; y asse di simmetria)

($p \pm x$) (aperta verso +destra, -sinistra; x asse di simmetria)

dà luogo ad una curva chiamata Parabola e l'Origine è detto Fuoco, e il campo di variabilità di tali coordinate è:

$$\left(-\frac{p}{2};+\infty\right) \qquad \textit{oppure} \qquad \left(+\frac{p}{2};-\infty\right)$$

Dove p=Parametro della Parabola e p/2=distanza del Vertice della Parabola dal Fuoco (Origine).

Valori Parametrici:

a) $\begin{cases}(p \pm x)\cos\beta = x \\ (p \pm x)\sin\beta = y\end{cases} \qquad (p \pm x)^2 = x^2 + y^2$

b) $\begin{cases}(p \pm y)\cos\beta = x \\ (p \pm y)\sin\beta = y\end{cases} \qquad (p \pm y)^2 = x^2 + y^2$

da cui l'Equazione per punti della parabola con il Fuoco nell' Origine:

$y^2 = p^2 \pm 2px$ (concavità verso l’asse delle x)

$x^2 = p^2 \pm 2py$ (concavità verso l’asse delle y)

Sviluppando:

$$(p \pm x)\cos\beta = x \Rightarrow [x] = \left[\frac{p}{1 \mp \cos\beta}\cos\beta\right]; \quad [x]\sin\beta = y\cos\beta \quad y = \left[\frac{p}{1 \mp \cos\beta}\right]\sin\beta$$

possiamo scrivere:

Eq. Polare e Parametrica con Fuoco nell' Origine:

$$OA = \frac{p}{1 \mp \cos\beta} \qquad \begin{cases} OA\cos\beta = \dfrac{p}{1 \mp \cos\beta}\cos\beta = x \\ OA\sin\beta = \dfrac{p}{1 \mp \cos\beta}\sin\beta = y \end{cases}$$

Eq. Parametrica con il Vertice nell' Origine:

$$\begin{cases} OA\cos\beta = x = \dfrac{2p}{\tan^2\beta} \\ OA\sin\beta = y = \dfrac{2p}{\tan\beta} \end{cases}$$

quadrando e sommando abbiamo l’equazione per punti:

$$OA = \frac{2p\cos\beta}{\sin^2\beta}; \qquad OA = \frac{\dfrac{2px}{OA}}{\dfrac{y^2}{OA^2}} = \frac{2px}{y^2}OA \qquad \Rightarrow y^2 = 2px$$

Parametrica in COSENO:

Punto: $P_3 = \left(\frac{R}{\mathrm{COS}^2(\alpha)} \cos(2\alpha)\,, \frac{R}{\mathrm{COS}^2(\alpha)} \sin(2\alpha)\ \right)$

Curva: $(R(1 - tan^2(\alpha), 2R\ \tan(\alpha), \alpha, 0{,}2\pi)$

Da Conica a Parabola Parametrica di angolo (β)

da Conica $f(x) = \ a\,x^2 + \ b\,x \ + \ c = x(ax + b) + c \ = \ y_1 \ + c$

a Parametrica con $\frac{y_1}{x} = \tan(\beta) = ax + b; \quad x = \frac{\tan(\beta) - b}{a}$

$y_1 = \frac{[(\tan(\beta) - b)^2 + (\tan(\beta) - b)]}{a} = \frac{\tan(\beta) - b}{a}\ \tan(\beta)$

Curva Parametrica; $[(tan(\beta) - \ b) \ / \ a, ((tan(\beta) - \ b) \ / \ a) \ tan(\beta) \ + \ c, \beta, 0, \pi]$