VII. AREA E PERIMETRO ELLISSE

AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

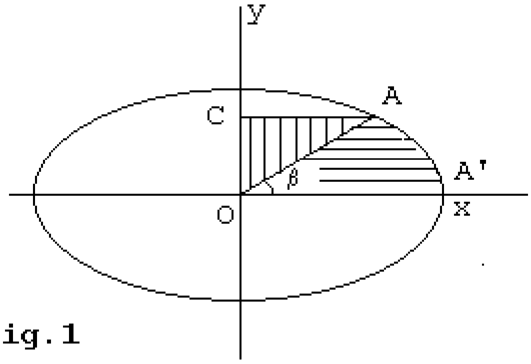


Fig.1

I°) Sia $S(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$ l’area OCAA’.
La funzione S(x) deve essere tale che $\frac{dS(x)}{dx}=y=\frac{m}{q}\sqrt{q^2-x^2}$ e poiché è $S(x)=\frac{1}{2}xy+\text{area settore OAA'}$ e l’arco AA’ è tale che il suo coseno vale $\frac{x}{q}$ avremo $\frac{\text{Area settore OAA'}}{S}=\frac{arc\cos\frac{x}{q}}{\frac{\pi}{2}}$

e quindi $S(x)=\frac{1}{2}x\frac{m}{q}\sqrt{q^2-x^2}+\frac{2S}{\pi}arc\cos\frac{x}{q}$ espressione che derivata e semplificata darà la Funzione primitiva:

$$S(x)=\frac{m}{q}\left(\frac{x\sqrt{q^2-x^2}}{2}+\frac{q^2}{2}arc\cos\frac{x}{q}\right)=OCAA'$$

che per x = q cosα; y = m senα diventa:

$$S(x)=OCA+OAA'=\frac{qm}{2}(\cos\alpha sen\alpha+arc\cos\cos\alpha)$$

da cui: $S(x)_{(OAA')}=\frac{qm}{2}arc\cos\cos\alpha=\frac{qm}{2}\frac{\alpha^o\pi}{180}=\frac{qm}{2}a^R$ (α in rad)

II°) **INTEGRALE DI VAG.** In modo più rigoroso possiamo calcolare l’integrale delle uguaglianze parametriche
$x=q\cos\alpha;\ y=m sen\alpha;\ \ y'=m\cos\alpha$

$$S(x)_{(OCAA')}=\int q\cos\alpha\, m(\cos\alpha)\,d\alpha=qm\int\cos^2\alpha\,d\alpha=qm\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,d\alpha=$$

$$=qm\left[\int\frac{d\alpha}{2}+\int\frac{\cos 2\alpha\ d\alpha}{2}\right]=qm\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{sen2\alpha}{4}\right)=\frac{qm}{2}\alpha+\frac{q\cos\alpha\ \ msen\alpha}{2}$$

$$\left(\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);\quad 2\alpha=t\quad d\alpha=\frac{1}{2}dt;\quad \int\frac{\cos t}{2}dt=\frac{1}{2}sent=\frac{1}{2}sen2\alpha\right)$$

l’ultimo membro dell’espressione <u>S</u> è l’area OCA per cui avremo in radianti l’area $S(x)_{OAA'}=\frac{mq}{2}\alpha$ (Esempi numerici più avanti)

Come si vede l'area dell'Ellisse dipende dall'angolo α legato all'Ellisse dalla relazione: $\tan\beta=\frac{m}{q}\tan\alpha$

AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

Essendo α in radianti, da ciò che abbiamo visto l'area di un settore dell'Ellisse e':

$$S = \frac{qm}{2} arc\cos(\cos\alpha) = \frac{qm}{2}\alpha$$

dove per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\qquad S = \frac{qm}{2}\frac{\pi}{2}$ area quadrante Ellisse

Se sostituiamo q = R + r e m =R - r(sistema algebrico in cui dati due valori R e r ha soluzione per 2R=q+m e 2r=q-m), l'area del settore dell'Ellisse sarà:

$$S = \frac{qm}{2}\alpha = \frac{R^2 - r^2}{2}\alpha$$

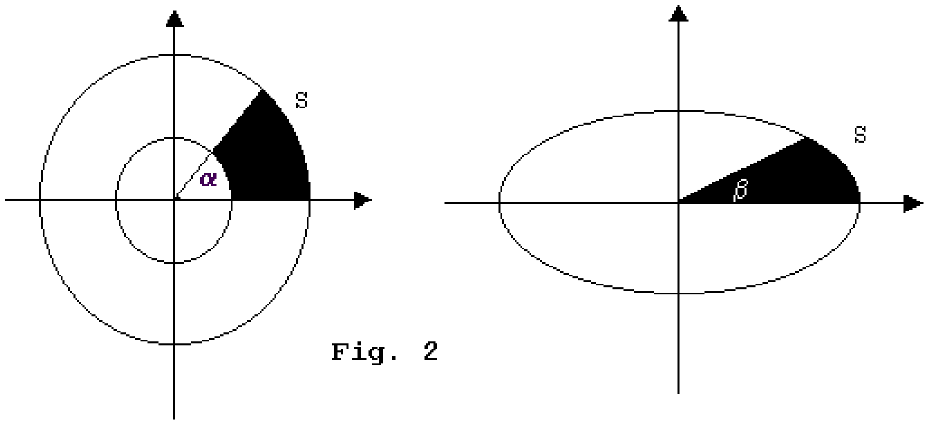


Fig. 2

E poichè α e' l'angolo delle circonferenze R ed r (Cap. V° ELLISSE), quest'ultima formula oltre che a rappresentare l'area di un settore dell'Ellisse rappresenta anche l'area di un settore della corona circolare di ampiezza (R-r) di uguale valore:

L'area di un settore di Ellisse di angolo β e' uguale all'area di un settore di corona circolare di angolo α corrispondente a β mediante la formula $\alpha = arc\tan(\frac{q}{m}\tan\beta)$.

Possiamo anche aggiungere che l'area di un settore di Ellisse è proporzionale all'angolo che forma l'area del settore della corona circolare $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{qm}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} = \text{costante}$. Si tenga presente che l'angolo dell'area del settore dell'Ellisse va preso iniziando da zero,cioè dall'asse delle ascisse con movimento antiorario.

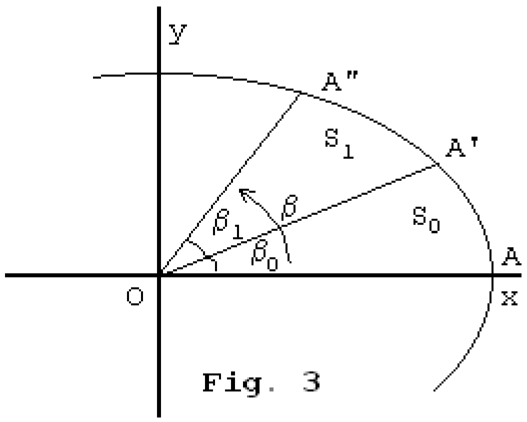


Fig. 3

Nell'Ellisse in figura si ha che $\beta = \beta_1 + \beta_0$ e $S = S_1 + S_0$ dove S è l'area del settore relativo a β. In realtà i due angoli calcolabili sono β e β_0 perché partono dall'ascissa ed essi danno luogo ai due angoli del settore corona-circolare α e α_0, tramite $\tan\alpha = \frac{q}{m}\tan\beta$ e $\tan\alpha_0 = \frac{q}{m}\tan\beta_0$; mentre β_1 non può dare il valore di α_1 non partendo dal valore zero dell'ascissa. Questo perché gli angoli dell'ellisse non sono proporzionali alle aree, mentre le aree della corona-circolare (uguali alle aree dell' Ellisse) sono proporzionali ai propri angoli, quindi $\frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S}{\alpha}$ ma dove si deve tener presente che nel rapporto $\frac{S_1}{\alpha_1}$, α_1 non ha un corrispettivo βeta nella Ellisse, perché l'area S_1 assume un valore posizionale in quanto l'integrale che la determina vale a partire dall'ascissa.

Noti β e β_0 si calcolerà S e S_0 e poi $S_1 = S - S_0$ e mediante la proporzione sopra indicata si troverà $\alpha_1 = \frac{S_1 \alpha_0}{S_0}$ *].

[**ESEMPIO 1**: dell'Ellisse in Fig. 3 siano i semi-assi q=3, m=2 ed i punti A'(2,320424812; 1,267653772) A"(0,589580871; 1,960996844)e i rispettivi angoli al centro:

$\beta_0 = \arctan\frac{1,267653772}{2,320424812} = 28,64788823$ e $\beta = \arctan\frac{1,960996844}{0,589580871} = 73,266403°$

mentre avremo gli angoli parametrici:

$$\alpha_0 = \arctan\frac{q}{m}\tan\beta_0 = 39,333031° = 0,686490895^{\,Rad}$$

$$\alpha = \arctan\frac{3}{2}\tan 73,266403 = 78,66606232° = 1,372981797^{\,Rad}$$

(entrambe anche con la formula parametrica $x = q\cos\alpha$ o $y = m\sin\alpha$)
e le rispettive aree ellittiche:

$$S = \frac{mq}{2}\alpha = 3 \cdot 1,372981797^{\,Rad} = 4,118945391 \qquad S_0 = 3 \cdot 0,686490895^{\,Rad} = 2,059472685$$

$$S_1 = S - S_0 = 4,118945391 - 2,059472685 = 2,059472705$$

Come vediamo l'Area S è doppia dell'Area S_0, quindi se $S_0 = S_1$, poiché sappiamo che $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{mq}{2}$ dovrà essere $\alpha_0 = \alpha_1$, ma α_1 non è determinabile dalle formule di calcolo viste in quanto l'area S_1

non è adiacente all'ascissa quindi da α_1 non possiamo calcolare l'angolo al centro β_1 che va calcolato per differenza:
$\beta_1 = \beta - \beta_0 = 73{,}266403\,° - 28{,}6478664\,° = 44{,}6185366\,°$
Tale angolo se fosse adiacente all'ascissa avrebbe come ipotetico angolo parametrico $\alpha_1^{'} = arc\tan \frac{q}{m} \tan 44{,}6185366\,° = 55{,}95690767\,°$ anziché $\alpha_1 = \alpha_0 = 39{,}333031\,°$.]

AREA PARZIALE DELL'ELLISSE

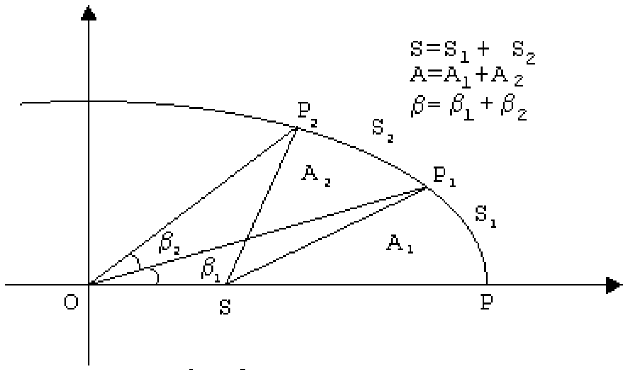


Fig.4

Sia (vedi Fig.4) $\mathbf{S_1}$ l'area ed $\mathbf{E_1}$ il relativo angolo parametrico in radianti di una Ellisse (di semiassi q > m); inoltre sia l'area $POP_2 = S = (S_1 + S_2)$ed **E** l'angolo parametrico relativo in radianti, abbiamo visto che $\frac{S}{E} = \frac{S_1}{E_1} = \frac{qm}{2}$. Ed osservando la Fig.4 vediamo:

$$A = S - area SOP_2 = S - \frac{\overline{OS}\, m \sin E}{2}$$

e sostituendo S: $A = \frac{mq}{2}E - \frac{OS\, m}{2}\sin E = \frac{mq}{2}\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right)$.

Si consideri che essendo il punto S tra O e P è sempre $\frac{\mathbf{OS}}{\mathbf{q}} < \mathbf{1}$,

dove OS è una qualunque distanza dal centro Ellisse.
Volendo il valore dell'area A_2 con A_2=A-A_1, sempre <u>a partire dall' ascissa</u> come per le aree S_1 e S, si avrà:

$$A_1 = \frac{mq}{2}\left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)$$

pertanto $A_2 = A - A_1 = \frac{mq}{2}\left[\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)\right] = \frac{mq}{2}M_2$.

Cioè
$$\frac{A}{E - \frac{OS}{q}\sin E} = \frac{A_1}{E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1} = \frac{A_2 = A - A_1}{\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)} = \frac{mq}{2}$$

Posto $M = \left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right)$ e $M_1 = \left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)$ (M e M_1 sono valori in Rad)

avremo $\frac{A}{M} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M - M_1}$ posto M_2=M-M_1 avremo $\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2}$

e se A_1=A_2 dovrà essere $M_2 = M_1$: analogamente a quanto visto precedentemente per l'area S_1 e α_1, l'angolo M_2 (proporzionale a A_2)

non ha un corrispettivo βeta nella ellisse, ma dovrà essere ricavato per differenza.
Possiamo allora scrivere la relazione geometrica che lega le aree dell'ellisse agli angoli di riferimento: $\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_0}{E_0}=\frac{qm}{2}$ e $\frac{A_1}{M_1}=\frac{A_2}{M_2}=\frac{qm}{2}$ per cui $\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_0}{E_0}=\frac{A_1}{M_1}=\frac{A_2}{M_2}=\frac{qm}{2}$ con i relativi significati visti per S,A,E,M.

ESEMPIO 2: Sia una ellisse di semiassi q=3 e m=2 (vedi **Fig.4**) e sia l'angolo di riferimento in radianti

$\alpha_1 = 39{,}333031°\frac{\pi}{180} = 0{,}686490895^{\,Rad}$ la distanza OS=1,5 (per cui $\frac{\overline{OS}}{q}=0{,}5$).

Sappiamo essere $\beta_1 = \arctan\frac{2}{3}\tan 39{,}333031° = 28{,}647888°$

$$M_1 = (0{,}686490895^{\,R} - 0{,}5\sin 39{,}333031°) = 0{,}369577452^{\,R}$$

M_1 è necessariamente in Rad perché proviene da α^R

e quindi l'area $A_1 = \frac{3\cdot 2}{2}M_1 = 1{,}108732356$

Posto $A=A_1+A_2$ e $A_1=A_2$ si ha $\frac{A_1}{M_1}=\frac{1{,}108732356}{0{,}369577452}=\frac{qm}{2}=3$ e $\frac{A}{M}=\frac{2A_1}{2M_1}=\frac{2{,}217464712}{0{,}739154904}=\frac{qm}{2}=3$

dovrà allora essere $M=\alpha-0{,}5\sin\alpha=0{,}739154904$ dove α è l'angolo di riferimento del settore A. Risolvendo α rispetto a M abbiamo $\alpha=1{,}206308053^R=69{,}11636023°$ infatti:

$M = 1{,}206308053 - 0{,}5\sin 69{,}11636023° = 0{,}739154903$ sufficientemente vicino al valore M di partenza.

Il valore $\frac{A_2}{M_2}$ è dato da $M_2=M_1$ ma in realtà M_2 non ha corrispondenza con l'area A_2 segnata in **Fig.4** in quanto l'area non è adiacente all' ascissa; esso è un valore proporzionale.

PROPRIETA' DELLE AREE DELL'ELLISSE

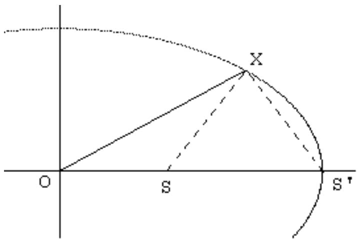


Fig. 5

L'espressione $M = (E - \frac{OS}{q}\sin E)$ determina l'area di un qualunque settore di ellisse; infatti ogni punto dell'ellisse è determinato dall'angolo parametrico E mentre la posizione del punto S lungo l'ascissa ne determina l'area (vedi Fig.5).

per $OS = 0$ avremo $S_x = \frac{mq}{2}E$ area $OS'\widehat{X}O$

per $OS < q$ avremo $S_x = \frac{mq}{2}(E - \frac{OS'}{q}\sin E)$ area $SS'\widehat{X}S$

per $OS = q$ avremo $S_x = \frac{mq}{2}(E - \sin E)$ area $S'\widehat{X}S'$

Dato il rapporto $\frac{OS}{q} = \varepsilon$ potremo scrivere per qualsivoglia area

$S_x = \frac{mq}{2}(E - \varepsilon \sin E) = \frac{mq}{2}M$.

Possiamo anche considerare il valore $\sqrt{qm} = R$ come raggio di una

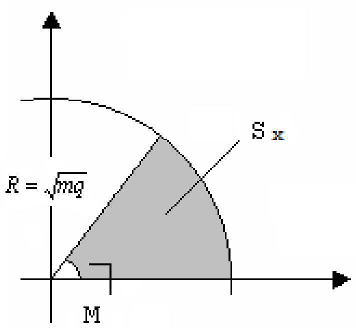
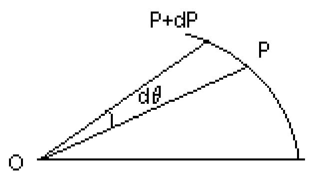


Fig. 5bis

circonferenza, che darà sempre $S_x = \frac{qm}{2}M = \frac{R^2}{2}M$ per cui l'area della circonferenza vale la relativa area dell' ellisse e se il suo tempo di percorrenza o Rivoluzione è P, esso varrà sia per l'ellisse sia per la circonferenza. Ora se P è un valore medio possiamo ipotizzare che l'arco della circonferenza verrà spazzata a velocità costante e quindi ad ogni tempuscolo t corrisponda un angolo al centro ed a questi la relativa area della circonferenza che a sua volta rappresenta un'area dell'ellisse. Inoltre per valori di t uguali si avranno nella circonferenza angoli al centro ed aree uguali, corrispondenti ad aree $\mathbf{S_x}$ dell'Ellisse uguali e percorse nello stesso tempo.

Da tutte queste considerazioni possiamo dire che nella circonferenza di riferimento di una ellisse, per la legge temporale, le aree S_x, sono lineari in un intervallo di tempo ed i punti del perimetro che le determinano possono essere animati da un moto di velocità angolare costante nella circonferenza ma diversa nella ellisse: questo ci permette di definire la proprietà dell' Ellisse, relativa ad una qualunque area $\mathbf{S_x}$:

AREE UGUALI SONO PERCORSE IN TEMPI UGUALI



Si consideri che la Fig.5 bis ci richiama, dal punto di vista geometrico, il concetto di velocità areale: «intenderemo per velocità areolare $\frac{dS}{dt}$ il rapporto fra l'area dS descritta nell'intervallo infinitesimo (t,t+dt) dal raggio vettore e lo stesso dt. L'area dS descritta da P-O nel tempo dt vale a meno di infinitesimi di ordine superiore, un settore circolare di raggio uguale a ρ (valore del raggio vettore all'istante t) e di angolo al centro dθ, incremento di θ nell'intervallo (t,t+dt). Si ha allora $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$. Quindi la velocità areale è $S' = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\theta}{dt}$ "Dario Graffi-MECCANICA RAZIONALE- C.Editrice Prof.R.Pàtron".
L'ultima espressione è la stessa vista per $\rho^2 = \left(\sqrt{mq}\right)^2$, quando si sia preso per angolo al centro gli angoli del vettore dell'ellisse, la relazione che lega questi agli angoli M e le rispettive aree S_x.

In **ASTRONOMIA** il valore E è detto **Anomalia Eccentrica** e quando il valore OS è uguale alla semidistanza focale (c) per cui $\frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{q}} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{q}} = \mathrm{e}$ (eccentricità) il valore $\mathrm{M} = (\mathrm{E} - \mathrm{e}\sin\mathrm{E})$ è chiamato **Anomalia Media** (Mean Anomaly), inoltre la proprietà di uguaglianza tra le aree, per uno stesso tempo è chiamata *Seconda Legge Sperimentale di Keplero*.

SUL TEOREMA DEI PIANETI E L'AREA DELL'ELLISSE

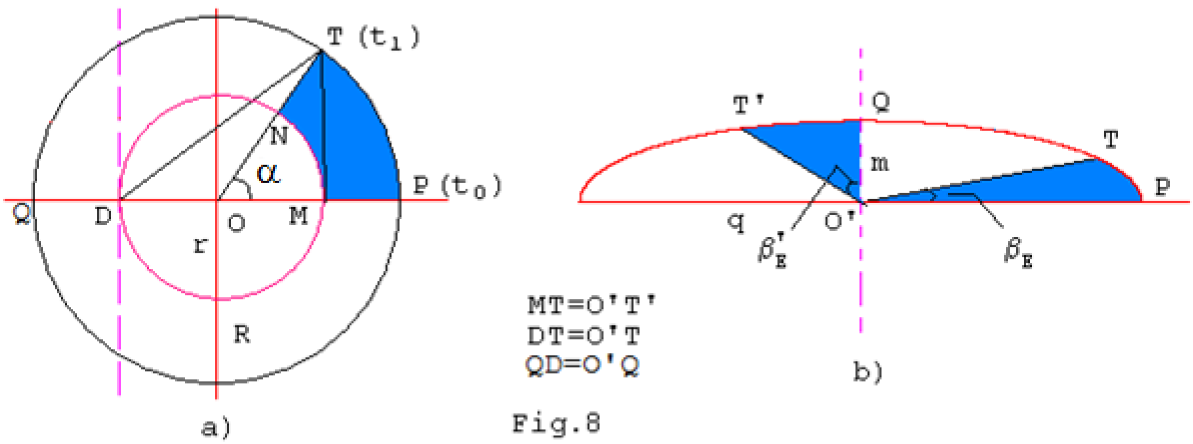


Fig.8

Per effetto del Teorema dei Pianeti (fig.8) la circonferenza a) di raggio R dà luogo all'ellisse b) (vedi Cap.VI Pag.25-26) di semi assi q=R+r e m=R-r.
Sulla Circonferenza abbiamo per Carnot:

$\overline{DT}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos^2(180° - \alpha)$ $\qquad \overline{MT}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos^2(\alpha)$

E le coordinate sull'Ellisse:

T $\left(q\cos\frac{\alpha}{2}; m\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ e T' $\left(q\sin\frac{\alpha}{2}; m\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ e le distanze

$$\overline{O'T}^2 = q^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + m^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = (R+r)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + (R-r)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 + 2Rr\cos^2\alpha$$

$$\overline{O'T'}^2 = q^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + m^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = (R+r)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + (R-r)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} = R^2 + r^2 - 2Rr\cos^2\alpha$$

Ora volendo calcolare l'area della ellisse così tracciata, (per quanto visto nel paragrafo precedente) tale area risulta essere $\overline{PO'TP} = \frac{mq}{2}\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2}\frac{\alpha}{2}$ per cui l'area $\overline{PMNT} = \frac{R^2 - r^2}{2}\alpha$ della circonferenza è il doppio dell' area PO'TP, come indicato anche dalla velocità areale.
Ora se il tracciamento dell'Area della circonferenza avviene nel tempo $t = (t_1 - t_0)$ vuol dire che l'arco PT della circonferenza e PT (o QT') dell' ellisse sono percorsi nello stesso tempo e ad ogni punto T della circonferenza corrisponde un punto T (o T') nell'ellisse poichè i vettori DT=O'T (o MT= O'T').

Ovviamente per $\alpha = \pi = 180°$ nella circonferenza corrisponderà un punto nella ellisse il cui parametro è $\alpha/2 = \pi/2 = 90°$.

Con $\frac{\alpha}{2}$ abbiamo tutte le considerazioni viste nel calcolo dell'area dell' ellisse, per cui è possibile calcolare direttamente l'angolo $M = \left(\frac{\alpha^{Rad}}{2} - \varepsilon\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ partendo da un tempo medio t della circonferenza.

ESEMPIO 3 Sia l'ellisse di semiassi q=3 e m=2 e la circonferenza R=2,5 e r=0,5 e nel tempo t (43,59111827 gg) si abbia $\alpha = \frac{360°}{P} t = 42°,96572823$ (P=365,24 gg periodo di rivoluzione)

$\frac{\alpha}{2} = 21°,48286412$, come da Fig.8 a)

Dalla circonferenza il teorema di Carnot:

$$\overline{MT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 4,670596221$$

$$\overline{MT} = 2,161156223$$

$$\overline{DT}^2 = (2,5)^2 + (0,5)^2 + 2 \cdot 2,5 \cdot 0,5 \cdot \cos 42,96572823 = 8,329403779$$

$$\overline{DT} = 2,886070647$$

****

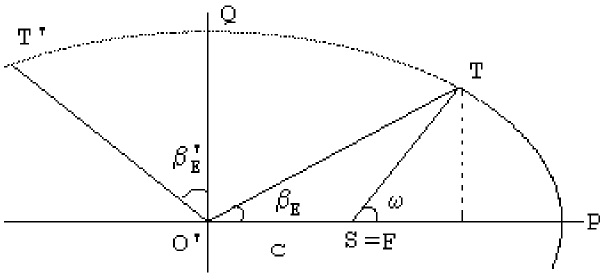


Fig. 9

Tenendo conto del Teorema dei Pianeti applichiamo alla relativa ellisse Fig.9 i dati calcolati nella circonferenza MT, DT e α/2.
Applichiamo i valori parametrici per le coordinate del punto T':

$$\begin{cases} x = m\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos 21,48286412 = 1,861054277 \\ y = q\sin\frac{\alpha}{2} = 3\sin 21,48286412 = 1,09866883 \end{cases}$$

quadrando e sommando $\overline{O'T'} = \sqrt{4,67059622} = 2,161156223$ **= MT**

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E^{'} = \arctan\frac{q}{m}\tan\frac{\alpha}{2} = \arctan\frac{3}{2}\tan 21,48286412 = \arctan 0,590347548 = 30°,5553738$$

****

Per il punto T:

$$\begin{cases} x = q\cos\frac{\alpha}{2} = 3\cos 21,48286412 = 2,791581416 \\ y = m\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin 21,48286412 = 0,732445886 \end{cases}$$

quadrando e sommando $\overline{O'T} = \sqrt{8,329403779} = 2,886070647$ **= DT**

Calcoliamo l'angolo al centro:

$$\beta_E = \arctan\frac{m}{q}\tan\frac{\alpha}{2} = \arctan\frac{2}{3}\tan 21,48286412 = \arctan 0,262376648 = 14°,70169181$$

LUNGHEZZA DELL’ARCO DELL'ELLISSE - RETTIFICAZIONE

Abbiamo visto:

$$x = q\cos\alpha = (R + r)\cos\alpha$$

$$y = m\,sen\alpha = (R - r)sen\alpha$$

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{m}{q}\tan\alpha;\ \frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = m\cos\alpha\frac{1}{-q\,sen\alpha} = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha}$$

Dalla formula di rettificazione $\frac{ds}{dx} = \left(\sqrt{1+(f'x)^2}\right)$ sostituendo con

$\frac{dx}{d\alpha} = -q\,sen\alpha;\qquad dx = d\alpha(-q\,sen\alpha)$ si avrà

$$ds = \left[\sqrt{1+\left(-\frac{m}{q}\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right)^2}\,d\alpha(-q\,sen\alpha)\right] = \left[\sqrt{\frac{q^2sen^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}{q^2sen^2\alpha}\left(-q\,sen\alpha\right)^2}\,\right]d\alpha$$

il che vuol dire:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{q^2sen^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{q^2sen^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}\ d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(R+r)^2sen^2\alpha + (R-r)^2\cos^2\alpha}\ d\alpha =$$

1]

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr(\cos^2\alpha - sen^2\alpha)}\ d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos 2\alpha}\ d\alpha;$$

Formula di rettificazione rappresentante l'Integrale ellittico di 2ª specie sotto nuova veste; infatti tale integrale sviluppato in cosα diventa $s = q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}\,d\alpha$ con e=eccentricità equivalente alla formula classica nota $s = q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$: quest'ultima espressione si sarebbe ottenuta ponendo x=qsinα e y=mcosα anziché x=qcosα e y=msinα, come è stato fatto.

La 1] non differisce dalla equazione mostrata nella pagina precedente “SUL TEOREMA DEI PIANETI………” in quanto i valori α e 2α in 1] equivalgono ad α/2 e α visti in quella pagina.

IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO (QUADRATURA)

Dalla formula precedente si ha: $\left\{\begin{array}{l}\text{per } \alpha=0 \;\; sar\grave{a} \;\; \sqrt{(R-r)^2}=\sqrt{m^2}=m \\ \text{per } \alpha=\frac{\pi}{2} \; sar\grave{a} \; \sqrt{(R+r)^2}=\sqrt{q^2}=q\end{array}\right\} 2R=(q+m)$

e il suo valore geometrico: $\left[\frac{\sqrt{q^2 sen^2\alpha+m^2\cos^2\alpha}}{2}+\frac{m}{2}\right]\alpha^R$

che per $\alpha=\pi/2$, il perimetro del quadrante dell'Ellisse e della circonferenza è uguale $\left(\frac{q+m}{2}\right)\frac{\pi}{2}=R\frac{\pi}{2}$ e quindi il perimetro dell'Ellisse e' uguale al perimetro della circonferenza di raggio R.

(Nel Cap.IIIBis “PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL’ELLISSE” avevamo scritto $\overline{SA}^2=\left(\frac{m^2}{q}\cos\alpha\right)^2+(m\sin\alpha)^2$ ed anche $\frac{ds}{d\alpha}=\frac{q}{m}\overline{SA}$ dove per α=0 e $\alpha=\frac{\pi}{2}$ abbiamo $\frac{ds}{d\alpha}=m$ e $\frac{ds}{d\alpha}=q$ giusto quanto sopra)

Riassumiamo!

a) l'area dell'ellisse e' uguale all'area della corona circolare data dalle due circonferenze;

b) la relazione che lega l'angolo dell'ellisse e delle circonferenze e' data da $\tan\beta=\frac{m}{q}\tan\alpha=\frac{R-r}{R+r}\tan\alpha$

c) mediante l'angolo α della circonferenza e' possibile calcolare il perimetro dell'ellisse e il relativo angolo β, sapendo che il perimetro del quadrante dell'ellisse e' uguale a quello della circonferenza maggiore

$$\left(R\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{q+m}{2}\frac{\pi}{2}\right)$$

d) gli archi dell’Ellisse e della Circonferenza sono uguali solo per $\alpha=\pi/2$, non per valori intermedi, come si può constatare calcolando la risoluzione geometrica di un qualunque arco di Ellisse AE per $0° < \alpha < \pi/2$:

$$\overline{AE}=\left[\frac{\sqrt{q^2 sen^2\alpha+m^2\cos^2\alpha}}{2}+\frac{m}{2}\right] \qquad \widehat{AE}=\overline{AE}\,\alpha\neq R\alpha$$

dove gli archi e gli angoli sono tutti conteggiati dall’ascissa.

ESEMPIO4: ARCO D'ELLISSE

Sia una Ellisse (q = 3,5; m = 1,7) e ricordando $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$, si voglia l'arco di ellisse:

per $\beta = \int_{25,906508}^{90}$ corrispondente a $\alpha = \int_{45}^{90}$; $\tan 25°,906508 = \frac{1,7}{3,5}\tan 45°$ dobbiamo allora calcolare il valore dell'arco, per

$\beta = \int_{0}^{25,906508}$ corrispondente a $\alpha = \int_{0}^{45}$ che darà:

$$Arc = \left[\frac{\sqrt{3,5^2\,0,5 + 1,7^2\,0,5}}{2} + \frac{1,7}{2}\right]\frac{45\pi}{180} = 1,7480463$$

mentre per: $\beta = \int_{0}^{90}$ e $\alpha = \int_{0}^{90}$ avremo: $Arc = 4,0840704$

L'arco richiesto sarà: $\beta = \int_{25,906508}^{90} = \int_{0}^{90} - \int_{0}^{25,906508}$ per $\alpha = \int_{45}^{90}$;

$$Arc = 4,0840704 - 1,7480463 = 2,3360241$$

Raccogliamo:

Angolo circonferenza α	Angolo Ellisse β	Area Ell. e cor.Circolare	Arco Ellisse	Arco Circ. R= (q+m)/2
0° ----> 45°	0°---> 25,906	2,3365595	1,7480463	2,0420352
45°----> 90°	25,90--> 90°	2,3365595	2,3360241	"
0° ----> 90°	0°---->90°	4,6731191	4,0840704	4,0840704

Come già visto nel "Teorema dei Pianeti" esiste una relazione biunivoca tra Ellisse e i raggi di due circonferenze concentriche data da:

$$\begin{cases} q = R + r \\ m = R - r \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} R = \dfrac{q+m}{2} \\ r = \dfrac{q-m}{2} \end{cases}$$

L'espressione sopra si collega perfettamente all'esempio empirico:
«*Se schiacciamo un cerchio in due poli contrapposti, questi tenderà ad assumere la forma di una ellisse e tanto stringo tanto si allarga. Notiamo che l'Area originaria della circonferenza tende a zero, mentre il suo perimetro rimane costante e uguale a quello dell' anello iniziale; e quando i due poli si*

congiungeranno l’Area sarà a zero, ed il perimetro darà un semiasse che vale due volte il raggio del cerchio.»

Come visto nel capitolo precedente il perimetro dell'anello di raggio R e dell'ellisse è lo stesso, dato dal valore geometrico del Perimetro della Ellisse dell’integrale di 2° specie, cioè $R = \frac{q+m}{2}$ con q>m semi assi dell'ellisse,; ma ci dice anche che archi di settori minori dei quarti di arco non sono uguali tra loro (specchietto sopra)

Volendo calcolare la Velocità degli archi, dai valori dello specchietto avremo:

$$\frac{4{,}0840704}{T_{periodo}} = V \qquad \textit{Velocità media sulla circonferenza e sull'ellisse}$$

$$\frac{1{,}7480463}{T_{periodo}/2} = V_1 \qquad \textit{Velocità media primo tratto ellisse}$$

$$\frac{2{,}3360241}{T_{periodo}/2} = V_2 \qquad \textit{Velocità media secondo tratto ellisse}$$

$$\frac{V_1 + V_2}{2} = V \qquad \textit{Velocità media}$$