VII.BIS AREA E PERIMETRO IPERBOLE E PARABOLA

AREA DELL’IPERBOLE

Calcoliamo l’integrale delle uguaglianze Parametriche dell’Iperbole: $x=\frac{q}{\cos\alpha}$; $y=m\tan\alpha$ $y'=\frac{m}{\cos^2\alpha}$, come abbiamo fatto per l’Ellisse:

$$S(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{q}{\cos\alpha}\frac{m}{\cos^2\alpha}d\alpha=qm\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^3\alpha}d\alpha=qm\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}d\alpha=$$

$$=qm\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}d\alpha-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{da}{\cos\alpha}=qm\left[\sin\alpha\frac{1}{2\cos^2\alpha}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}\right]=$$

$$=qm\left[\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}+\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}\right)\right]=qm\left[\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}\right]=$$

$$=qm\left[\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}-\frac{1}{2}\ln(\tan\alpha+\sec\alpha)\right]+C=\frac{qm}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\ln\frac{(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\right]+C=AREE\ \ OAM-OVA+C=AREA\ VAM$$

$$\text{AREA OAM}=\frac{qm}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right]=\frac{xy}{2}$$

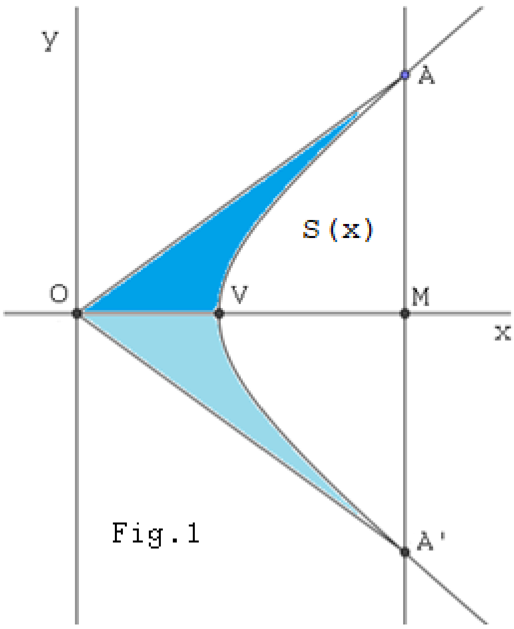

Fig.1

$$\text{AREA OVA}=\frac{qm}{2}\left[\ln\frac{(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\right]=\frac{qm}{2}\left[\ln\left(\frac{x}{q}+\sqrt{\left(\frac{x}{q}\right)^2-1}\right)\right]$$

SVILUPPIAMO L'ULTIMO LOGARITMO:

$$\left[\ln\left(\frac{x}{q}+\sqrt{\left(\frac{x}{q}\right)^2-1}\right)\right]=\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\sqrt{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2-1}\right)=$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}\left(1+\sqrt{\sin^2\alpha}\right)\right)=$$

$$=\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{AREA VAA'}\quad=qm\left[\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}-\ln\frac{(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}\right]+C$$

ESEMPIO: Sia l’Iperbole di semi-assi q=4,m=3 e il valore di X=5>q.
Applichiamo le formule delle funzioni parametriche(goniometriche) dell’Iperbole.

$$\cos\alpha=\frac{q}{x}=\frac{4}{5}=0{,}8\quad \alpha=36{,}86989765\qquad \sin 36{,}86989765\ =0{,}6$$

Applichiamo i dati alla formula per l’Area =VAA’:

$$12\left[\frac{0{,}6}{0{,}64}-l_n\frac{1{,}6}{0{,}8}\right]=12[0{,}9375-l_n 2]=2{,}932233833$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}=\ln\left[\frac{1}{\cos\alpha}+\tan\alpha\right]=\ln\left[\frac{1}{\cos\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}\right]=\ln\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]+C$$ per x=1/cosα

PERIMETRO DELL'IPERBOLE (RETTIFICAZIONE)

Siano le derivate delle uguaglianze Parametriche:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \left(\frac{q}{cos\,\alpha}\right)' = \frac{q\,sin\,\alpha}{cos^2\,\alpha} \qquad dx = \frac{q\,sin\,\alpha}{cos^2\,\alpha}d\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = (m\,tan\,\alpha)' = \frac{m}{cos^2\,\alpha} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{q\,sin\,\alpha}$$

e la formula di rettificazione dell'arco s, rispetto ad α:

$$ds = \left[\sqrt{1+\left(\frac{m}{q\,sin\,\alpha}\right)^2}\right]dx = \sqrt{1+\left(\frac{m}{q\,sin\,\alpha}\right)^2}\,\frac{q\,sin\,\alpha}{cos^2\,\alpha}d\alpha$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{q^2\,sin^2\,\alpha + m^2}}{cos^2\,\alpha}d\alpha \quad \textbf{[1]}$$

Trattandosi di una curva aperta sarà sempre: $0 \leq \alpha < \pi/2$.

La risoluzione geometrica dell'integrale **[1]** è:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{q^2\sin^2\alpha + m^2}}{\cos^2\alpha} + m\right]\alpha\frac{\pi}{180}$$

PERIMETRO DELLA PARABOLA (RETTIFICAZIONE)

Dal capitolo "TANGENTI DELLA PARABOLA" (Parametri Cap. V) abbiamo i valori delle derivate, riferite alle parabole del tipo (p±x) e dove p=2R:

$$\frac{dx}{d\alpha}=\frac{R\,sin\,\alpha}{cos^2\alpha} \qquad dx=\frac{R\,sin\,\alpha}{cos^2\alpha}\,d\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{R\,sin\,\alpha}{cos^2\alpha}\left[\frac{cos\,\alpha}{\sqrt{cos\,\alpha-cos^2\alpha}}\right] \qquad \tan\rho=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}=\frac{1-\cos\beta}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

La rettificazione dell'arco s è: $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{p}{y}\right)^2}$ **[1]**

e la rettificazione dell'arco s, rispetto ad α:

$$ds=\left[\sqrt{1+\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\,\frac{R\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\right]d\alpha=\left[\frac{R}{\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}}\right]d\alpha=\left[\frac{R}{\cos^2\alpha}\sqrt{1+\cos\alpha}\right]d\alpha$$

$$s=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+cos\,\alpha}}{cos^2\alpha}\,d\alpha \qquad \textbf{[2]}$$

Trattandosi di una curva aperta sarà sempre: $0\leq\alpha<\pi/2$
mentre il valore del parametro della parabola è p=2R.

La rettificazione dell'arco s, rispetto a β, si ottiene derivando x rispetto a β:

$$x=\frac{p\cos\beta}{1-\cos\beta} \qquad \frac{dx}{d\beta}=\frac{p\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2}$$

e sostituendo dx con dβ nella formula **[1]**:

$$\frac{ds}{d\beta}=\sqrt{1+\frac{(1-\cos\beta)^2}{\sin^2\beta}}\cdot\frac{p\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2}=p\frac{\sqrt{2(1-\cos\beta)}}{(1-\cos\beta)^2}$$

Tale formula è la stessa **[3]** che abbiamo visto nel Cap.IIIBis "PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELLA PARABOLA" quando consideravamo

$$\frac{ds}{d\beta}=\frac{\overline{SA}}{(1-\cos\beta)} \quad \text{dove} \quad \overline{SA}=p\frac{\sqrt{2(1-\cos\beta)}}{(1-\cos\beta)}$$

e da "Parametri Cap.V -PARABOLA" si ha il legame tra α e β

$$\begin{cases}\cos\beta=(1-2\cos\alpha)\\ \text{sen}\,\beta=\pm2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\end{cases} \qquad \tan\beta=\frac{\pm2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}}{+(1-2\cos\alpha)}$$

La risoluzione geometrica dell'integrale di s è possibile solo nella **[2]** vista sopra, la cui formula sarà:

$$R\,\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\cos^2\alpha}+\sqrt{2}\right)\alpha\,\frac{\pi}{180}$$ *(verificare)*