

## **VIII BIS. CICLOIDI DI VAG**

ELLISSE, PARABOLA, IPERBOLE

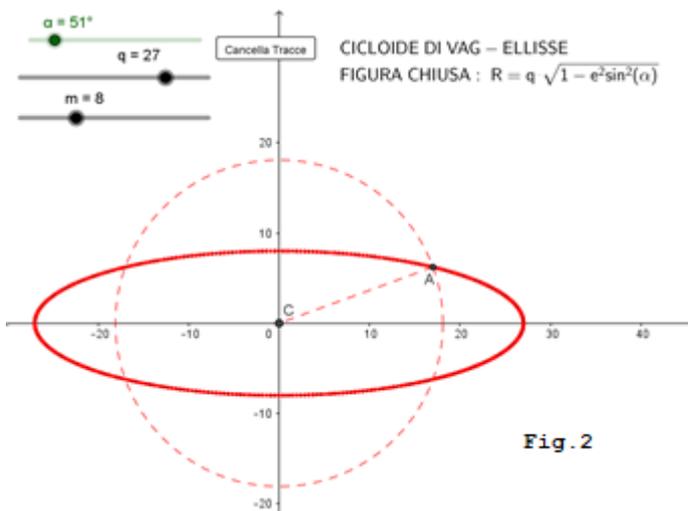
DEFINIZIONE DI CICLOIDE DI VAG

La Curva tracciata da un Punto che ruota secondo una circonferenza, con centro fisso, ma il cui raggio varia in lunghezza, in funzione dell'angolo al centro<sup>1</sup>.

(Ogni Curva regolare data da una Funzione continua, in un determinato intervallo, può essere interpretata e tracciata come una "Cicloide di Vag"; inoltre tale cicloide è la dimostrazione geometrica della teoria di Einstein sulla curvatura dello spazio-tempo: vedi applet [Geogebra.org](http://Geogebra.org)).

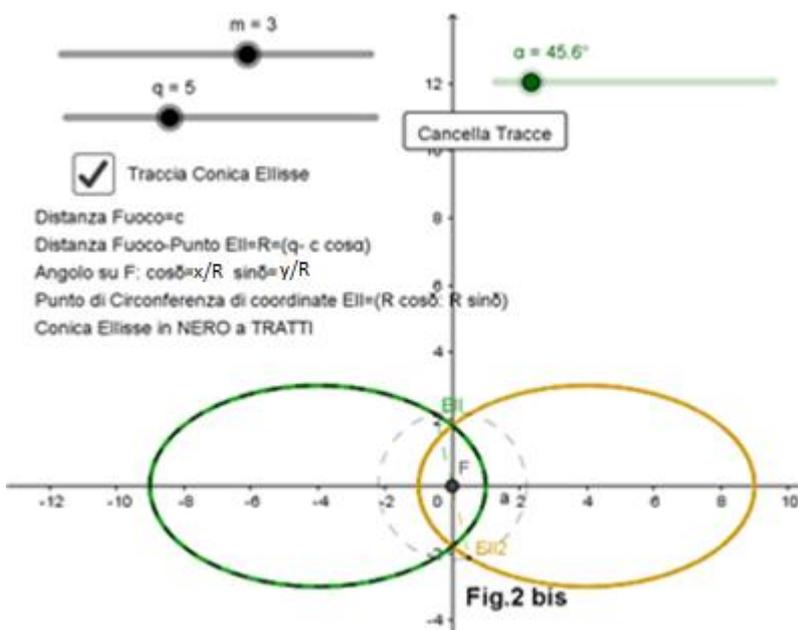
Più avanti vedere il RIEPILOGO dei valori da assegnare al raggio R della circonferenza, per ciascuna figura.

CICLOIDE DI VAG: ELLISSE



Nella Fig.2 abbiamo una circonferenza il cui centro è fisso, ma ora il suo raggio CA aumenta in lunghezza proprio come una Cicloide di Vag; avremo come risultato sempre una ellisse ma data dal moto di un punto su una circonferenza il cui raggio aumenta di lunghezza: vedi GEOGEBRA Fig.2 [\(Clicca qui\)](#)

Fig.2



Ora invece per la definizione di "Cicloide di Vag" possiamo descrivere l'Ellisse come punto di una circonferenza con Centro fisso, ma Raggio che si incrementa secondo il valore dell'angolo. Nell'esempio che segue come punto fisso si è scelto il Fuoco.

Applet GEOGEBRA Fig.2bis [\(Clicca qui\)](#)

Fig.2 bis

<sup>1</sup> Vedi su Google la DEFINIZIONE GEOMETRICA delle [CICLOIDI](#)

CICLOIDE DI VAG: PARABOLA

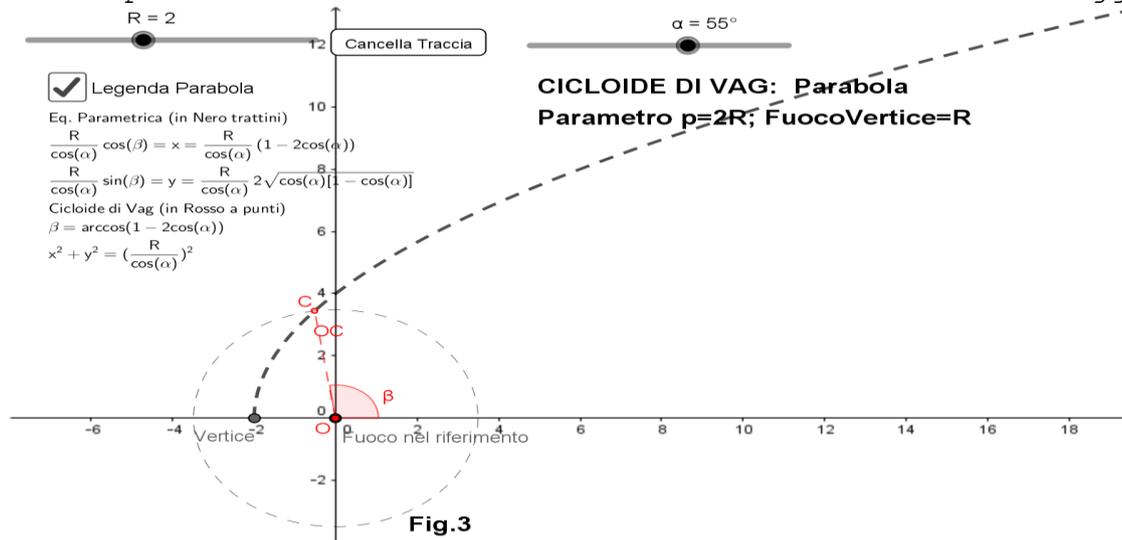
Analogamente a quanto fatto per l'ellisse anche la Parabola può essere ottenuta mediante due moti.

1. il moto di un punto circolare
2. e un moto lungo il raggio della stessa.

Utilizzeremo una parabola con il fuoco nell'origine, aperta a destra del tipo  $y^2 = 2px + p^2$  utilizzando l'equazione parametrica di questa:

$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \frac{R}{\cos \alpha} (\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}) \end{cases} \quad \cos \beta = (1 - 2 \cos \alpha)$$

Se un punto ruota secondo una circonferenza mentre il raggio di



questa aumenta la sua lunghezza si ottiene una PARABOLA di parametro  $p=2R$  e con il fuoco nell'origine.

Applet GEOGEBRA Fig.3 [\(Clicca qui\)](#)

CICLOIDE DI VAG: IPERBOLE

Infine come per la parabola, alla stessa maniera possiamo ottenere (vedi Le Curve Cap.III) l'**Iperbole**  $m^2 x^2 - q^2 y^2 = m^2 q^2$  e l'**Iperbole Equilatera**  $x^2 - y^2 = q^2$ .

Cioè il raggio di circonferenza Raggio OC, che si allunga a mano a mano che ruota di  $\sqrt{\frac{q^2 + m^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{q}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \frac{m^2}{q^2} \sin^2 \alpha}$  per l'Iperbole e di  $\frac{q}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$  per l'Iperb. Equilatera.

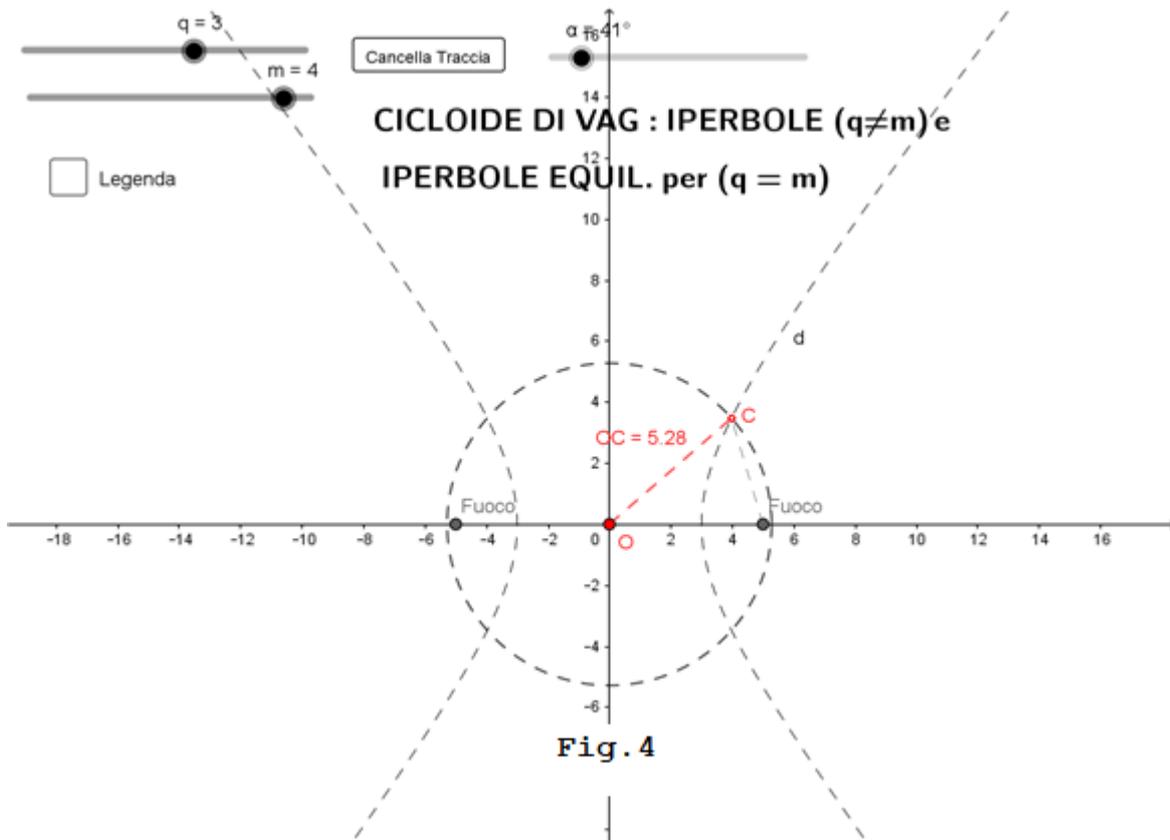


Fig.4

Applet GEOGEBRA Fig.4 [\(Clicca qui\)](#)

Analogamente abbiamo una Iperbole e una Iperb. Equilatera data da una circonferenza di centro nel Fuoco e raggio rispettivamente

$$FC = \frac{q}{\cos \alpha} (\cos \alpha - e) \quad \text{e} \quad FC = \frac{q}{\cos \alpha} (\cos \alpha - \sqrt{2})$$

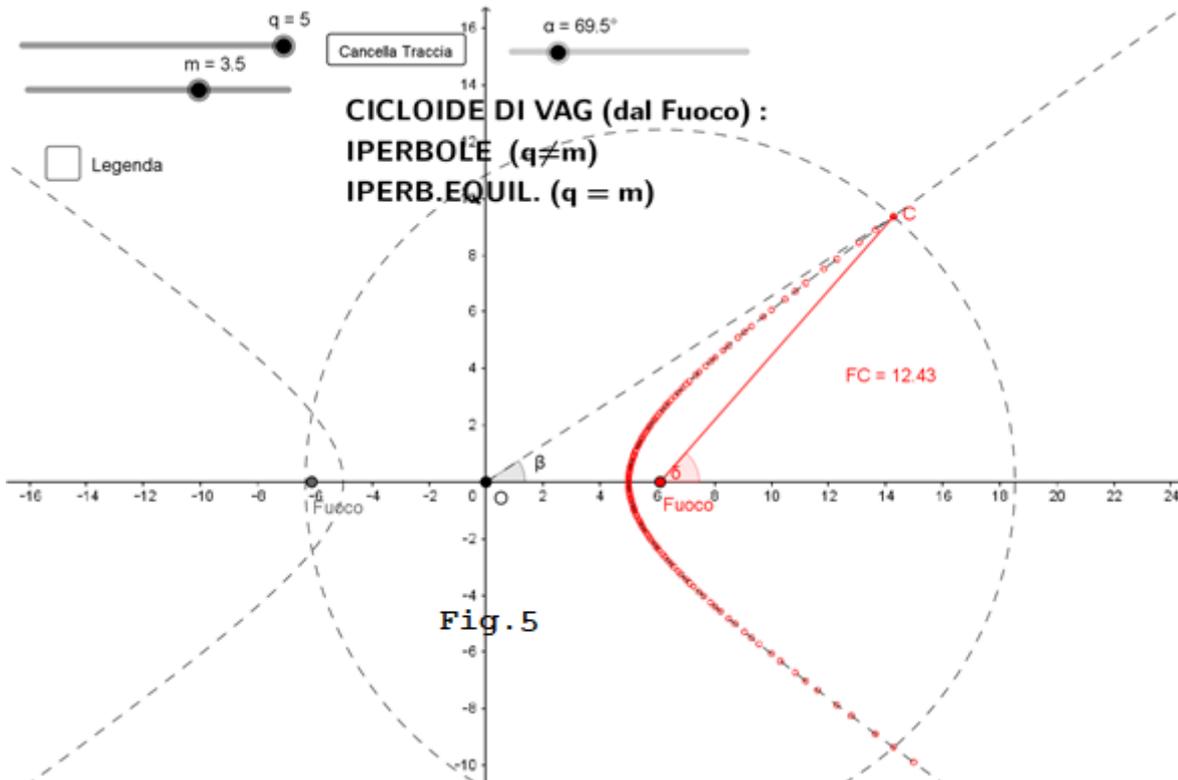


Fig.5

Applet GEOGEBRA Fig.5 [\(Clicca qui\)](#)

RIEPILOGO DELLE CICLOIDI NOTE

Data una circonferenza di raggio=R e angolo  $\alpha \in (0,2\pi)$ .

\*\*\*\*\*FIGURE CHIUSE

o  $R = q |\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}|$  ELLISSE centro nel riferimento;  
 assi  $q > m$  e angolo  $\beta = \arctan \frac{m}{q} \tan \alpha$

o  $R = (q - c \cos \alpha) = q (1 - e \cos \alpha)$  ELLISSE centro nel fuoco;  
 assi  $q > m$  e angolo  $\delta = \arctan \frac{m \sin \alpha}{q(\cos \alpha - e)}$

\*\*\*\*\*FIGURE APERTE

La SPIRALE è Cicloide di Vag nel PIANO

La MOLLA a spirale è Cicloide di Vag nello SPAZIO

o  $\frac{R}{\cos \alpha}$  CIRCONFERENZA di angolo  $\alpha$ : semiretta.

\*\*\*\*\*

o  $\frac{R}{\cos \alpha}$  PARABOLA centro nel Fuoco;  $R=p/2$   $p$ =parametro  
 di angolo  $\beta = \arccos(1-2\cos \alpha)$ .

(Vedi Geometria Parametrica "Parametri" Cap.V Pag.4)

\*\*\*\*\* IPERBOLE con riferimento nel CENTRO

o  $\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{q}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{m}{q}\right)^2 \sin^2 \alpha}$  IPERBOLE;  
 assi  $q \neq m$  e di angolo  $\beta = \arctan \frac{m}{q} \sin \alpha$

o  $\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{q}{\cos \alpha} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$  IPERBOLE EQUIL.;  
 assi  $q = m$  e di angolo  $\beta = \arctan \sin \alpha$

\*\*\*\*\* IPERBOLE con riferimento nel FUOCO

o  $\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{q}{\cos \alpha} (\cos \alpha - e)$  IPERBOLE;  
 assi  $q \neq m$  di angolo  $\delta = \arctan \frac{m \sin \alpha}{q(1 - e \cos \alpha)}$

o  $\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{q}{\cos \alpha} (\cos \alpha - \sqrt{2})$  IPERBOLE EQUIL. ;  
 assi  $q = m$  e di angolo  $\delta = \arctan \frac{\sin \alpha}{(1 - \sqrt{2} \cos \alpha)}$

(Vedi Geometria Parametrica "Le Curve" Cap.III)