XI. PUNTO RIFERITO A PIU' TRASLAZIONI (CURVA DEL CASSINI E LEMNISCATA DI BERNOULLI)

PUNTO RIFERITO A PIU' TRASLAZIONI

Sia il punto A (x;y;β) riferito ad un sistema come da fig. 1, ma lo si abbia anche riferito a due altri sistemi come da fig. 2,dove O'(a;b) e O''(a';b') rispetto ad O, cioè $\overline{OO'}^2 = \left(a^2 + b^2\right)$ e $\overline{OO''}^2 = \left(a'^2 + b'^2\right)$ e con gli angoli come in figura. Per quanto visto:

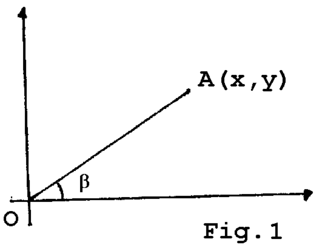


Fig.1

$$\begin{cases} \overline{O'A}\cos\alpha_1 = OA\cos\beta - a = x - a = x' \\ \overline{O'A}\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = OA\,\mathrm{sen}\,\beta - b = y - b = y' \end{cases}$$

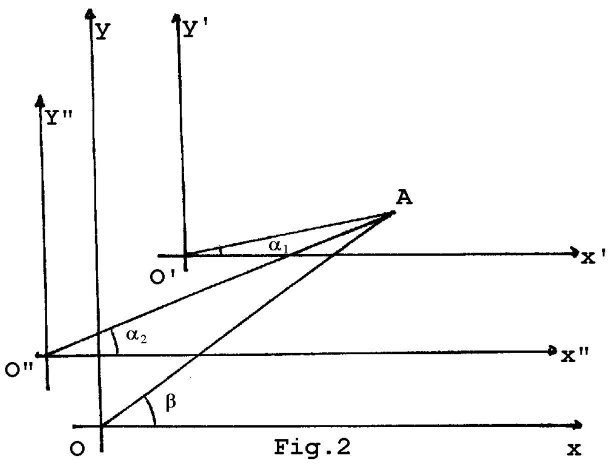


Fig.2

$$\begin{cases} \overline{O''A}\cos\alpha_2 = OA\cos\beta - a' = x - a' = x'' \\ \overline{O''A}\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = OA\,\mathrm{sen}\,\beta - b' = y - b' = y'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} OA\cos\beta = x \\ OA\,sen\beta = y \end{cases}$$

$$\overline{O'A} = (OA\cos\beta - a)\cos\alpha_1 + (OA\,\mathrm{sen}\,\beta - b)\,\mathrm{sen}\,\alpha_1 = (x - a)\cos\alpha_1 + (y - b)\,\mathrm{sen}\,\alpha_1$$

$$\overline{O''A} = (OA\cos\beta - a')\cos\alpha_2 + (OA\,\mathrm{sen}\,\beta - b')\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = (x - a')\cos\alpha_2 + (y - b')\,\mathrm{sen}\,\alpha_2$$

$$\overline{OA} = x\cos\beta + y\,\mathrm{sen}\,\beta$$

CURVA DEL CASSINI E LEMNISCATA DI BERNOULLI

Essendo OA; O'A; O''A segmenti orientati posso conteggiarli tra loro. Vediamo quindi qualche esempio tra i più noti (per esemplificazione di scrittura useremo i valori per punti (x-a) ; (x-a'); ecc. anzichè (OA cos β-a); (OA cos β-a'), ecc.): per $\overline{O'A}*\overline{O''A}$ avremo

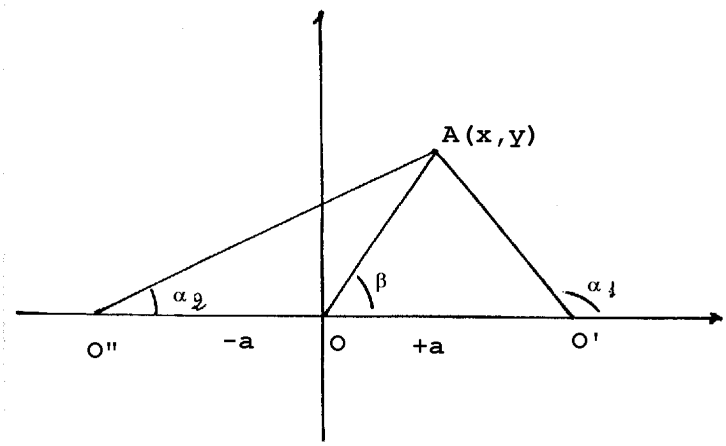
1a) $$\begin{cases}\overline{O'A}^2\,\overline{O''A}^2=\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]\left[(x-a')^2+(y-b')^2\right]=\\=(x-a)^2(x-a')^2+(x-a)^2(y-b')^2+(x-a')^2(y-b)^2+(y-b)^2(y-b')^2\end{cases}$$

1b) $$\begin{cases}\overline{O'A}\,\overline{O''A}=\left[(x-a)\cos\alpha_1+(y-b)\mathrm{sen}\alpha_1\right]\left[(x-a')\cos\alpha_2+(y-b')\mathrm{sen}\alpha_2\right]=\\=(x-a)(x-a')\cos\alpha_1\cos\alpha_2+(x-a)(y-b')\cos\alpha_1\mathrm{sen}\alpha_2+\\+(x-a')(y-b)\cos\alpha_2\mathrm{sen}\alpha_1+(y-b)(y-b')\mathrm{sen}\alpha_1\mathrm{sen}\alpha_2\end{cases}$$

Se volessimo che un tale prodotto fosse costante cioè $\overline{O'A}*\overline{O''A}=K^2$ e i riferimenti O', O, O'' sullo stesso asse come da figura, avremo: $a'=-a$ e $b=b'=0$ e quindi

2a) $$(x^2-a^2)^2+(x-a)^2y^2+(x+a)^2y^2+y^4=K^4$$

2b) $$(x^2-a^2)\cos\alpha_1\cos\alpha_2+(x-a)y\cos\alpha_1 sen\alpha_2+(x+a)y\cos\alpha_2 sen\alpha_1+y^2 sen\alpha_1 sen\alpha_2=K^2$$



Le equazioni 2a) e 2b) sono identiche. Infatti nella 2b) moltiplicando primo e secondo membro per $\overline{O'A}$ e $\overline{O''A}$ e sostituendo: $\overline{O'A}\cos\alpha_1=x-a$, $\overline{O''A}\cos\alpha_2=x-a'=x+a$, ecc.
si avrà: $(x^2-a^2)^2+(x-a)^2y^2+(x+a)^2y^2+y^2y^2=k^2k^2$ identica alla 1a).

(continua)

Sviluppiamo la 2a) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4=k^4$ e vediamo che tale espressione non e' che la "Curva del Cassini" per punti.
In forma Parametrica la 2a) può essere scritta:

$$(\overline{OA}^2)^2-2a^2(\overline{OA}^2)(\cos^2\beta-\mathrm{sen}^2\beta)+(a^4-k^4)=0$$

$$\overline{OA}^2_{1/2}=\frac{2a^2\cos 2\beta\pm\sqrt{4a^4\cos^2 2\beta-4(a^4-k^4)}}{2}=a^2\cos 2\beta\pm\sqrt{k^4-a^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta}$$

Si osservi che il radicando $\Delta=k^4-a^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta$ e' positivo per a<k e che delle due soluzioni di $\overline{\mathrm{OA}}^2_{1/2}$, poichè sempre positivo, quindi, è valida solo la seguente

$(a^2\cos 2\beta+\sqrt{k^4-a^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta})$.

Infatti per $(a^2\cos 2\beta-\sqrt{k^4-a^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta})$ si avrebbe
$(a^2\cos 2\beta)^2>k^4-a^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta$; $a^4(\cos^2 2\beta+\mathrm{sen}^2\,2\beta)>k^4$ cioè a>k in contraddizione con la positività del Δ che deve essere a<k.

Dunque $\overline{OA}=\sqrt{a^2\cos 2\beta+\sqrt{k^4-a^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta}}$
e' il valore della distanza dall'origine, dei punti nella "Curva del Cassini".

Se nella nostra espressione ponessimo k=a avremo la curva chiamata LEMNISCATA DI BERNOULLI cioè
$\overline{OA}=\left|\sqrt{a^2\cos 2\beta+a^2\cos 2\beta}\right|=\left|\sqrt{2a^2\cos 2\beta}\right|$ valida solo per cos2β>0

CURVA DEL CASSINI

$$\left|\sqrt{\mathrm{a}^2\cos 2\beta+\sqrt{\mathrm{k}^4-\mathrm{a}^4\,\mathrm{sen}^2\,2\beta}}\right|=\mathrm{x}\cos\beta+\mathrm{y}\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad \mathrm{k}>\mathrm{a}$$

CURVA LEMNISCATA DI BERNOULLI

$$\left|\sqrt{2\mathrm{a}^2\cos 2\beta}\right|=\mathrm{x}\cos\beta+\mathrm{y}\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad \mathrm{k}=\mathrm{a} \qquad \cos 2\beta>0$$

ELLISSE E IPERBOLE

L'esempio tipico di un punto riferito a due riferimenti lo abbiamo dall'Ellisse e dalla Iperbole, dove le distanze di un punto da due diversi riferimenti e' dato come costante. Qui vediamo l'esempio della Ellisse.
Dalla pag.1 facciamo:

$$\overline{O'A}+\overline{O''A}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2}=k$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=k-\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2}$$

poniamo a=c a'=-c k=2q b=b'=0 e quadriamo

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2+4q^2-4q\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-2xc=2xc+4q^2-4q\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Semplificando: $q\sqrt{(x+c)^2+y^2}=q^2+cx$

e quadrando: $x^2\left(q^2-c^2\right)+q^2y^2=q^2\left(q^2-c^2\right)$

poiché tale espressione è del tipo $\overline{OA}^2=x^2+y^2$ si potrà scriverne l’Eq.Parametrica di Vag.

$$\begin{cases} q\sqrt{q^2-c^2}\cos\alpha=x\sqrt{q^2-c^2} \\ q\sqrt{q^2-c^2}\sin\alpha=qy \end{cases} \qquad \begin{cases} x=q\cos\alpha \\ y=\sqrt{q^2-c^2}\sin\alpha \end{cases}$$ già vista

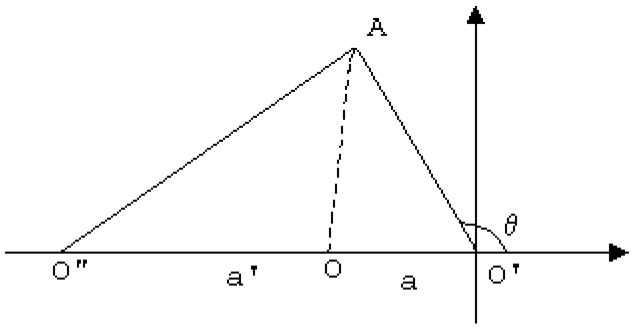
e poiché dalla condizione iniziale ne deriva che $q^2-c^2=m^2$ avremo la condizione parametrica $x=q\cos\alpha$ e $y=m\sin\alpha$ e quella per punti (Cap.III): $x^2m^2+q^2y^2=q^2m^2$ con q=assemaggiore e m=asseminore.

EQUAZIONE POLARE CLASSICA

(Ellisse, Iperbole, Circonferenza)

Dal caso visto in precedenza $\overline{O'A} \pm \overline{O''A} = K$ (costante) possiamo fare, vedi figura:

$$\begin{cases} \left(\overline{O''A}\right)^2 = \left(K \mp \overline{O'A}\right)^2 = \overline{O'A}^{\,2} + K^2 \mp 2K\overline{O'A} \\ \left(\overline{O''A}\right)^2 = (a'+a)^2 + \overline{O'A}^{\,2} + 2(a'+a)\overline{O'A}\cos\theta \end{cases}$$



e uguagliando: $\overline{O'A}^{\,2} + K^2 \mp 2K\overline{O'A} = (a'+a)^2 + \overline{O'A}^{\,2} + 2(a'+a)\overline{O'A}\cos\vartheta$

$$\overline{O'A} = \frac{K^2 - (a'+a)^2}{2(\pm K + (a'+a)\cos\theta)}$$

la espressione $2(\pm K + (a'+a)\cos\theta)$ può essere scritta $\pm 2(K \pm (a'+a)\cos\theta) = \pm 2(K + (a'+a)\cos\theta)$ in quanto il valore del coseno è positivo e negativo, variando da 0° a 360°.Pertanto

$$\overline{O'A} = \pm\frac{K^2 - (a'+a)^2}{2(K + (a'+a)\cos\theta)} \qquad \overline{O'A} = \frac{\pm\dfrac{K^2 - (a'+a)^2}{2K}}{\left(1 + \dfrac{(a'+a)}{K}\cos\theta\right)}$$

Facendo $p = \pm\dfrac{K^2 - (a'+a)^2}{2K}$ e $e = \dfrac{(a'+a)}{K}$ possiamo scrivere:

$$\overline{O'A} = \rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \textbf{1]}$$

Se poniamo K=2q, dove q=asse maggiore o asse trasverso, la **1]** sarà l’Equazione Polare Classica, calcolata dal Fuoco=Origine, quando sia p la costante Parametro-Focale; (e) la costante eccentricità e θ la variabile del vettore del Fuoco. La costante K può essere maggiore o inferiore ad (a’+a) a seconda il valore di O’A±O”A.
Se sostituiamo (a’+a)=eK avremo che:

$$p = +\frac{K^2 - (eK)^2}{2K} = \frac{K}{2}\left(1 - e^2\right) \quad \textbf{a]} \qquad \text{e} \qquad p = +\frac{(eK)^2 - K^2}{2K} = \frac{K}{2}\left(e^2 - 1\right) \quad \textbf{b]}$$

Nel caso **a]** p è il parametro relativo all’ Ellisse con l’origine nel fuoco, nel caso **b]** di quello della Iperbole; quindi l’(e) di **a]** è diverso dall’(e) di **b]**. In entrambi i casi tuttavia il suo valore è identico: $\frac{m^2}{q}$. Il valore p vediamo dipendere solamente da K e dalla eccentricità (e), possiamo quindi scrivere:

$$\overline{O'A} = \frac{K}{2}\frac{(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)} \qquad \overline{O'A} = \frac{K}{2}\frac{(e^2-1)}{(1+e\cos\theta)} \qquad \textbf{2]}$$

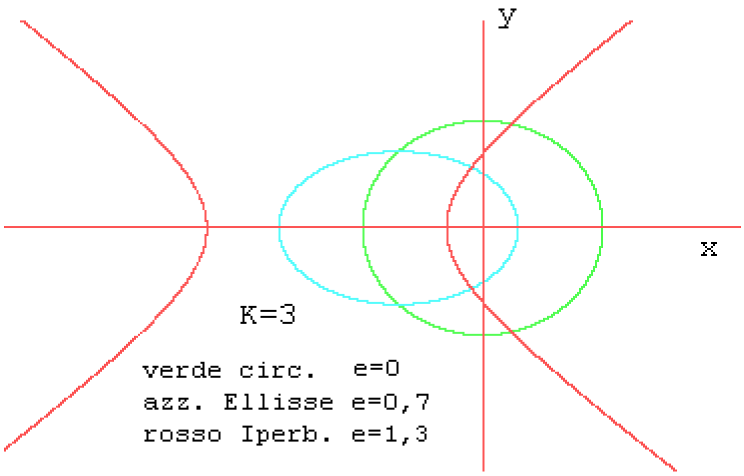
e le due espressioni della **2]** rappresentano la stessa figura, in quanto il Parametro-Focale e lo stesso.
In generale dalla **1]** e dalla **2]** abbiamo che il valore **e** disegna il tipo della figura; **K** la grandezza della curva e l’angolo **θ** i punti che la compongono.

Con **e=0** abbiamo una Circonferenza di raggio K/2.

con **e<1** sappiamo avere una Ellisse.

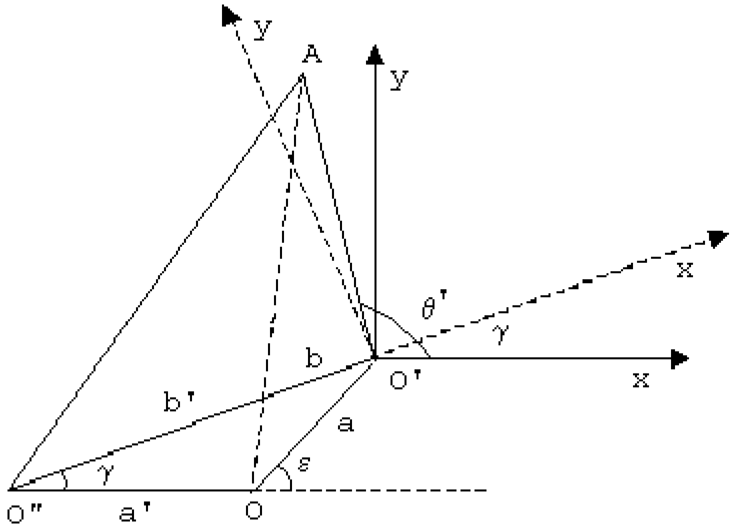
con **e>1** sappiamo avere una Iperbole.

come possiamo vedere dalla figura sotto:



Nel Cap.III “ELLISSE (FUOCO)” abbiamo visto essere $\cos\theta = \frac{\cos\alpha - e}{1 - e\cos\alpha}$ e nel Cap.III “IPERBOLE (FUOCO)” avevamo visto $\cos\theta = \frac{1 - e\cos\alpha}{\cos\alpha - e}$

Se i segmenti a ed a’ sono deviati come in figura sotto,possiamo sempre arrivare a calcolare O’O”=(b+b’) e riportarci al caso generale, a condizione che siano dati o ε o γ, oltre ad a e a’,poiché questi dati sono legati tra loro dai soliti passaggi:



$$\begin{cases} \overline{O'O''}\cos\gamma = a\cos\varepsilon + a' \\ \overline{O'O''}\sin\gamma = a\sin\varepsilon \end{cases} \qquad \left(\overline{O'O''}^2\right) = a^2 + a'^2 + 2\,a\,a'\cos\varepsilon \qquad \tan\gamma = \frac{a\sin\varepsilon}{a\cos\varepsilon + a'}$$

che daranno l’ EQ. POLARE CLASSICA vista, con $\theta = \theta' - \gamma$:

$$\overline{O'A} = \rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta' - \gamma)} \qquad \textbf{1]}$$

$$\overline{O'A} = \frac{K}{2}\frac{(1-e^2)}{(1+e\cos\theta'-\gamma)} \qquad \overline{O'A} = \frac{K}{2}\frac{(e^2-1)}{(1+e\cos\theta'-\gamma)} \qquad \textbf{2]}$$