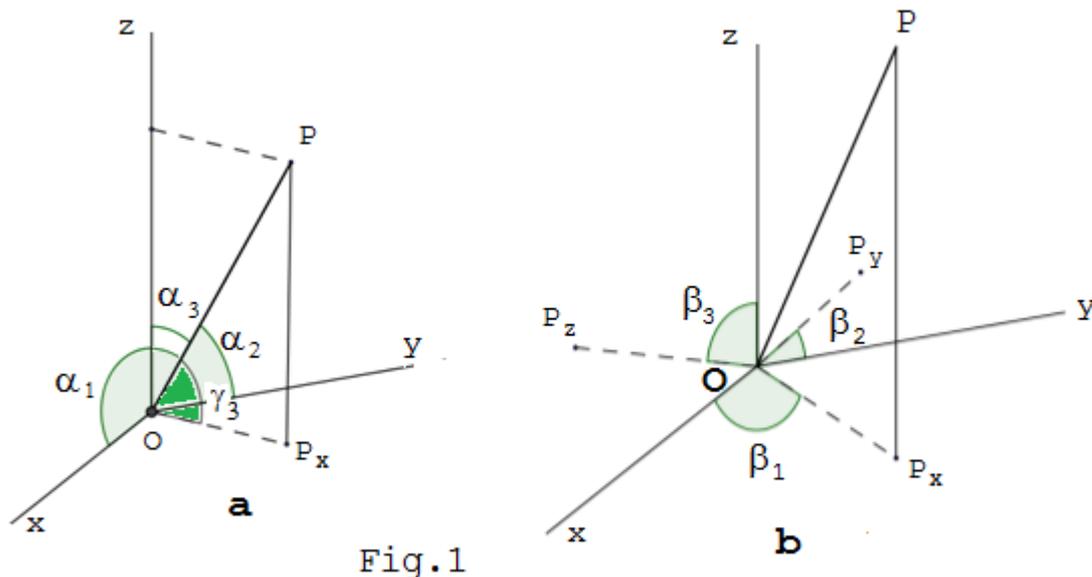


II. I L P U N T O N E L L O S P A Z I O

IL PUNTO NELLO SPAZIO



Sappiamo che $\overline{OP} = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3$ e' un Eq. di Vag in quanto

$$1a) \begin{cases} \overline{OP} \cos \alpha_1 = x \\ \overline{OP} \cos \alpha_2 = y \\ \overline{OP} \cos \alpha_3 = z \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 90 - \gamma_1 \\ \alpha_2 = 90 - \gamma_2 \\ \alpha_3 = 90 - \gamma_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OP} \sin \gamma_1 = x \\ \overline{OP} \sin \gamma_2 = y \\ \overline{OP} \sin \gamma_3 = z \end{cases}$$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = \sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_2 + \sin^2 \gamma_3 = 1$$

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Siano P_x, P_y, P_z proiezioni di P sui piani coordinati:

$$1b) \begin{cases} \overline{OP}_x = \sqrt{\overline{OP}^2 - z^2} = x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1 \\ \overline{OP}_y = \sqrt{\overline{OP}^2 - x^2} = y \cos \beta_2 + z \sin \beta_2 \\ \overline{OP}_z = \sqrt{\overline{OP}^2 - y^2} = z \cos \beta_3 + x \sin \beta_3 \end{cases} \quad \text{Eq. di Vag sui piani coord}$$

$$\begin{cases} \overline{OP}_x \cos \beta_1 = x \\ \overline{OP}_x \sin \beta_1 = y \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OP}_y \cos \beta_2 = y \\ \overline{OP}_y \sin \beta_2 = z \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OP}_z \cos \beta_3 = z \\ \overline{OP}_z \sin \beta_3 = x \end{cases}$$

$$\overline{OP}_x \cos \beta_1 = \overline{OP}_z \sin \beta_3 \quad \overline{OP}_y \cos \beta_2 = \overline{OP}_x \sin \beta_1 \quad \overline{OP}_z \cos \beta_3 = \overline{OP}_y \sin \beta_2$$

Dalla figura si vede anche che:

$$1c) \begin{cases} \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_3 = \overline{OP} \cos \gamma_3 = \overline{OP}_x \\ \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_1 = \overline{OP} \cos \gamma_1 = \overline{OP}_y \\ \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_2 = \overline{OP} \cos \gamma_2 = \overline{OP}_z \end{cases} \quad \text{Ug. dove } \begin{cases} \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + \operatorname{sen}^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_3 = \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 2 \\ 2\overline{OP}^2 = \overline{OP}_x^2 + \overline{OP}_y^2 + \overline{OP}_z^2 \end{cases}$$

cioè la somma dei quadrati delle proiezioni sui piani ortogonali è uguale a due volte il quadrato del segmento;

$$\text{Inoltre } \begin{aligned} 2\overline{OP}^2 &= \overline{OP}_x \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_3 + \overline{OP}_y \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_1 + \overline{OP}_z \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_2 \\ 2\overline{OP} &= \overline{OP}_x \operatorname{sen} \alpha_3 + \overline{OP}_y \operatorname{sen} \alpha_1 + \overline{OP}_z \operatorname{sen} \alpha_2 \quad (\text{Uguag.}) \end{aligned}$$

e sostituendo OP di 1c) con 1a) dove è $(OP = \frac{z}{\cos \alpha_3} = \frac{x}{\cos \alpha_1} = \frac{y}{\cos \alpha_2})$

$$\text{si avrà: } \begin{cases} z \tan \alpha_3 = \overline{OP}_x = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \tan \alpha_1 = \overline{OP}_y = \sqrt{y^2 + z^2} \\ y \tan \alpha_2 = \overline{OP}_z = \sqrt{z^2 + x^2} \end{cases} \quad \text{**Ug.)}$$

Per le condizioni viste in 1a), 1b), 1c), possiamo scrivere:

$$2a) \begin{cases} \overline{OP} \cos \alpha_1 = x = \overline{OP}_x \cos \beta_1 = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_3 \cos \beta_1 \\ \overline{OP} \cos \alpha_2 = y = \overline{OP}_y \operatorname{sen} \beta_1 = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \beta_1 \\ \overline{OP} \cos \alpha_3 = z \end{cases}$$

$$2b) \begin{cases} \overline{OP} \cos \alpha_1 = x \\ \overline{OP} \cos \alpha_2 = y = \overline{OP}_y \cos \beta_2 = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \beta_2 \\ \overline{OP} \cos \alpha_3 = z = \overline{OP}_y \operatorname{sen} \beta_2 = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \beta_2 \end{cases}$$

$$2c) \begin{cases} \overline{OP} \cos \alpha_1 = x = \overline{OP}_z \operatorname{sen} \beta_3 = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_2 \operatorname{sen} \beta_3 \\ \overline{OP} \cos \alpha_2 = y \\ \overline{OP} \cos \alpha_3 = z = \overline{OP}_z \cos \beta_3 = \overline{OP} \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \beta_3 \end{cases}$$

2a) 2b) 2c) non sono che le trasformazioni da eq. Parametriche ad eq. Polari.

Sviluppando opportunamente le uguaglianze 1a), 1b), 1c) tra le altre considerazioni abbiamo le seguenti:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\overline{OP}_y}{x} = \frac{\overline{OP}_y}{OP_x \cos \beta_1} = \frac{\overline{OP}_y}{OP_z \operatorname{sen} \beta_3}$$

$$\text{ma } \frac{\overline{OP}_y}{OP_x \cos \beta_1} \frac{\operatorname{sen} \beta_1}{\cos \beta_2 \cos \beta_1} = \frac{\tan \beta_1}{\cos \beta_2}$$

$$\text{oppure } \frac{OP_y}{OP_z \operatorname{sen} \beta_3} = \frac{\cos \beta_3}{\operatorname{sen} \beta_2 \operatorname{sen} \beta_3} = \frac{1}{\tan \beta_3 \operatorname{sen} \beta_2}$$

da cui la relazione: $\frac{\tan \beta_1}{\cos \beta_2} = \frac{1}{\tan \beta_3 \operatorname{sen} \beta_2}$ e $\|\tan \beta_1 \tan \beta_2 \tan \beta_3 = 1\|$

$$\text{oltre } \begin{cases} \tan \alpha_1 = \frac{\tan \beta_1}{\cos \beta_2} \\ \tan \alpha_2 = \frac{\tan \beta_2}{\cos \beta_3} \\ \tan \alpha_3 = \frac{\tan \beta_3}{\cos \beta_1} \end{cases} \quad \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \beta_3 = \frac{1}{\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 \tan \alpha_3}$$

Riducendo la 2a), 2b), 2c) abbiamo:

$$\text{dalla 2a) } \begin{cases} \cos \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha_3 \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \beta_1 \\ \cos \alpha_3 = \cos \alpha_3 \end{cases} \quad \text{che sviluppata come Eq. di Vag:}$$

$$1 = (\sin \alpha_3 \cos \beta_1) \cos \alpha_1 + (\sin \alpha_3 \operatorname{sen} \beta_1) \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 \cos \alpha_3$$

$$1 - \cos^2 \alpha_3 = \sin^2 \alpha_3 = \sin \alpha_3 (\cos \beta_1 \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \beta_1 \cos \alpha_2)$$

$$3a) \quad \sin \alpha_3 = \cos \beta_1 \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \beta_1 \cos \alpha_2 \quad \tan \beta_1 = \frac{y}{x} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

E analogamente

$$3b) \quad \sin \alpha_1 = \cos \beta_2 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \beta_2 \cos \alpha_3 \quad \tan \beta_2 = \frac{z}{y} = \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2}$$

$$3c) \quad \sin \alpha_2 = \cos \beta_3 \cos \alpha_1 + \operatorname{sen} \beta_3 \cos \alpha_3 \quad \tan \beta_3 = \frac{x}{z} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3}$$

-----La condizione $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ da noi indicata può essere convertita alla forma usuale della letteratura uguagliando

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha_3 \cos \beta_1 \\ \cos \alpha_2 = \operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \beta_1 \\ \cos \alpha_3 = \cos \alpha_3 \end{cases} \quad \text{da cui la somma dei quadrati} = 1.$$

Tale conversione è vantaggiosa in alcune applet che non prevedono tre angoli ma solo due.-----

ESEMPI

I) Sfruttando le formule viste è possibile determinare un punto P(x₀, y₀, z₀) dando alcuni dei valori che abbiamo analizzato. In questo esempio sono date le tre proiezioni OP_x, OP_y, OP_z che abbiamo

visto dare: $\overline{OP} = \sqrt{\frac{\overline{OP}_x^2 + \overline{OP}_y^2 + \overline{OP}_z^2}{2}}$ il cui valore è vero solo se

$$\overline{OP}_x < \overline{OP}; \quad \overline{OP}_y < \overline{OP}; \quad \overline{OP}_z < \overline{OP}$$

Nel caso che una delle proiezioni fosse uguale o maggiore di OP, le tre proiezioni non sono le proiezioni di uno stesso punto: quindi una delle tre è errata. Abbiamo visto:

$$\text{da 1a) } \begin{cases} \sin \alpha_3 = \frac{\overline{OP}_x}{\overline{OP}} \\ \sin \alpha_1 = \frac{\overline{OP}_y}{\overline{OP}} \\ \sin \alpha_2 = \frac{\overline{OP}_z}{\overline{OP}} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \cos \alpha_3 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_3} \\ \cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} \\ \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} \end{cases} \quad \text{da 1b) } \begin{cases} \overline{OP} \cos \alpha_3 = z_0 \\ \overline{OP} \cos \alpha_1 = x_0 \\ \overline{OP} \cos \alpha_2 = y_0 \end{cases}$$

con il che resta determinato il punto P(x₀, y₀, z₀; α₁, α₂, α₃).

II) Sono Date le due proiezioni OP_x e OP_y e l'angolo β₁ (vedi Fig.1) tra OP_x e l'asse delle x. Faremo:

$$\begin{cases} \overline{OP}_x \cos \beta_1 = x_0 \\ \overline{OP}_x \sin \beta_1 = y_0 \end{cases} \quad e \quad \text{poi} \quad \begin{cases} \overline{OP}_y \cos \beta_2 = y_0 \\ \overline{OP}_y \sin \beta_2 = z_0 \end{cases}$$

Noti (x₀, y₀, z₀) è possibile determinare OP e i coseni direttori e quindi la posizione esatta di P.

III) DISTANZA DI DUE PUNTI. Siano i punti A e B:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \alpha_1 = a_1 \\ \overline{OA} \cos \alpha_2 = a_2 \\ \overline{OA} \cos \alpha_3 = a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{OB} \cos \varepsilon_1 = b_1 \\ \overline{OB} \cos \varepsilon_2 = b_2 \\ \overline{OB} \cos \varepsilon_3 = b_3 \end{cases}$$

Dalla loro distanza per punti abbiamo

$$\overline{AB}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos \delta$$

Dove $\cos \delta = \cos \alpha_1 \cos \varepsilon_1 + \cos \alpha_2 \cos \varepsilon_2 + \cos \alpha_3 \cos \varepsilon_3$ è l'angolo tra OA e OB

IV°) dalla Eq. di Vag di un punto:

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \alpha_1 = x \\ \overline{OA} \cos \alpha_2 = y \\ \overline{OA} \cos \alpha_3 = z \end{cases} \text{ possiamo scrivere } \begin{cases} \overline{OA} \cos \alpha_1 = x \\ \overline{OA}^2 (\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3) = y^2 + z^2 \end{cases}$$

e poiché $\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 - \cos^2 \alpha_1 = \sin^2 \alpha_1 = \cos^2 (90 - \alpha_1)$ possiamo scrivere

$$\begin{cases} \overline{OA} \cos \alpha_1 = x \\ \overline{OA} \sin \alpha_1 = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases} \text{ il cui significato è dato dalla Fig.2:}$$

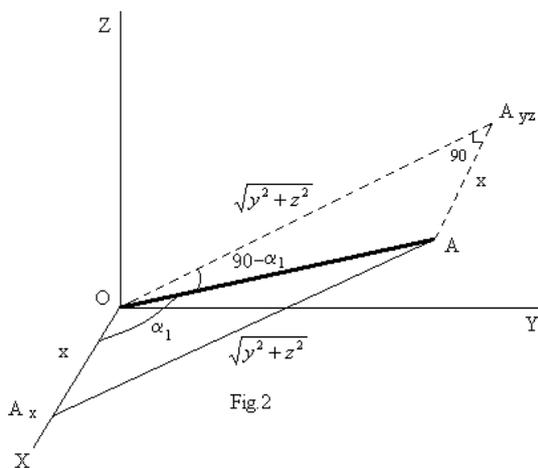


Fig 2

il segmento $\overline{OA_{yz}} = \overline{AA_x}$ è la proiezione di OA sul piano coordinato ZOY e come visto in **Ug) Pag.2 sappiamo che tale proiezione dà

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x} = \frac{\overline{OA_{yz}}}{x}.$$

Tutti i segmenti in questione sono contenuti nel piano per l'asse x e OA: la retta OA_{yz} è l'intersezione del piano indicato con il piano ZOY.