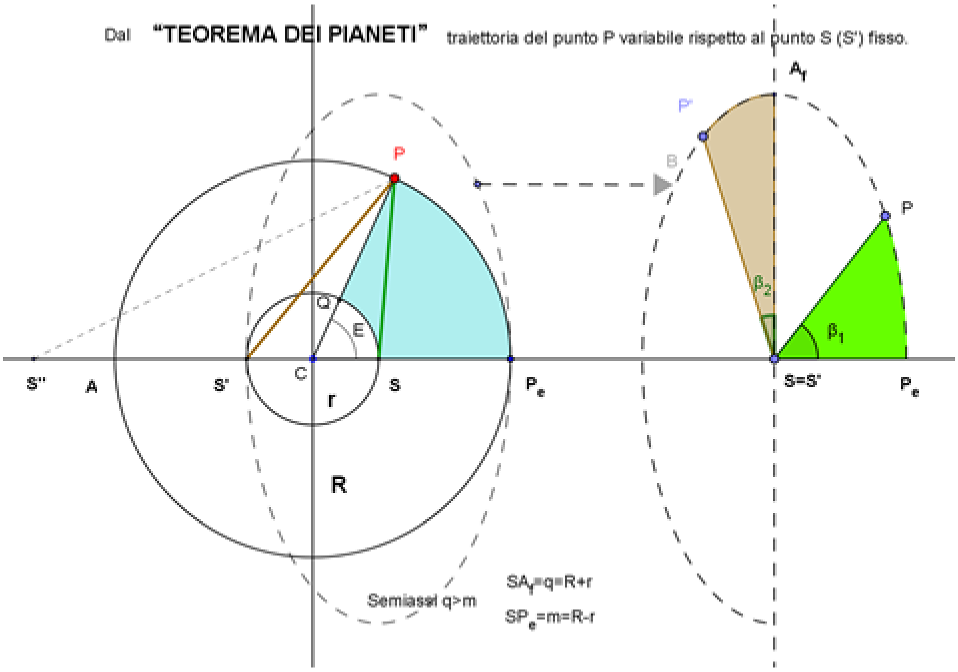
TEOREMA DEI PIANETI

E’ il teorema che fornisce la corrispondenza biunivoca tra Circonferenza e relativa Ellisse e viceversa.
Ecco l’enunciato del Teorema dei Pianeti:
«Data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria una ellisse e il punto fisso il suo centro.»

Nella figura, che segue, il punto P è il punto della circonferenza ed S un punto preso, in questo caso, entro la circonferenza; le distanze S’P e SP sono state tracciate quali misure di raggi di Ellisse nella figura accanto a partire da un ipotetico punto S, posto fuori dalla prima figura per semplice esemplificazione, a rappresentare il punto S della circonferenza.



Il Teorema si dimostra in modo semplicissimo calcolando SP dal triangolo SCP con il Teorema del Coseno e angolo E (analogo ragionamento vale per il triangolo CS’P).

$\overline{SP}^2 = R^2 + r^2 - 2R\,r\,\cos E \qquad \overline{S'P}^2 = R^2 + r^2 + 2R\,r\,\cos E$

Questa uguaglianza può tradursi, considerando $E = 2\left(\frac{E}{2}\right)$ in

$$\overline{SP}^2 = (R^2 + r^2)\left(cos^2\frac{E}{2} + sin^2\frac{E}{2}\right) - 2R\,r(cos^2 E/2 - sin^2 E/2)$$

$$\overline{SP}^2 = (R-r)^2\cos^2\frac{E}{2} + (R+r)^2 - \sin^2\frac{E}{2} \qquad \overline{S'P}^2 = (R+r)^2\cos^2\frac{E}{2} + (R-r)^2\sin^2\frac{E}{2}$$

una Ellisse, di semi-assi q=(R+r)>m=(R-r)

$\overline{SP}^2 = m^2 \cos^2\frac{E}{2} + q^2 \sin^2\frac{E}{2}$ $\qquad$ $\overline{S'P}^2 = q^2 \cos^2\frac{E}{2} + m^2 \sin^2\frac{E}{2}$

Tale dimostrazione geometrica non è che la soluzione algebrica del noto sistema a due incognite; dati due valori q>m:

$$\begin{cases}(R+r) = q \\ (R-r) = m\end{cases} \quad - - - \rightarrow \quad \begin{cases}(R+r)+(R-r) = 2R = (q+m) \\ (R+r)-(R-r) = 2r = (q-m)\end{cases}$$

Infatti la relazione che dà la **corrispondenza** tra circonferenza ed ellisse è: **2R**=(R+r)+(R-r)= **(q+m) *)**

per qualunque valore di r; il che vuol dire $R = \frac{(q+m)}{2}$ e $r = \frac{(q-m)}{2}$.

Per la proprietà dell'Ellisse parametrica la relazione che lega gli angoli sarà:

$$\tan\beta_1 = \frac{q}{m}\tan\frac{E}{2} \quad \text{e} \quad \tan\beta_2 = \frac{m}{q}\tan\frac{E}{2} \ .$$

L'ellisse indicata dal Teorema dei Pianeti «non è visibile» come traiettoria del moto del punto P, ma essendo le sue distanze dal punto S raggi di ellisse sul piano cartesiano, posso affermare che il moto di P (circolare rispetto al suo centro di riferimento C) si comporta rispetto a S effettivamente come un moto ellittico, tratteggiato nella figura e quindi riscritto in qualunque altra posizione.

(Vedi applet ”Teorema dei Pianeti” oppure su Google con GeoGebra)

** Nel caso di un punto S_P nello spazio, considerato S punto della sua ***proiezione*** (S_PS=z=sp) sul piano della circonferenza, tale punto S darà luogo, sul piano della circonferenza, ad una Ellisse come visto sopra: $\overline{SP}^2 = \rho^2 = R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cos E$

ma aggiungendo alla distanza di SP=ρ la S_PS=z=sp, perpendicolari tra loro, avremo la nuova ellisse di raggi ρ':

$$\overline{S_pP} = \rho' = \sqrt{\rho^2 + sp^2}$$

l'ellisse precedente i cui raggi sono incrementati dalla costante sp e di semi-assi $q' = \sqrt{q^2 + sp^2}$ e $m' = \sqrt{m^2 + sp^2}$ **.

(Vedi applet ”Teorema dei Pianeti” nello spazio)

Il ”Teorema dei Pianeti” sul Piano visto sopra, stabilisce:

1. L'importantissima corrispondenza biunivoca tra Circonferenza ed Ellisse e viceversa.
2. Il nome di "Teorema dei Pianeti" è dato perché facendo q=Afelio e m=Perielio di un Pianeta si ottengono le distanze SP dei relativi Pianeti dal Sole.
3. Un semplice calcolo dimostra che SP-Circonferenza=SP-Ellisse
4. Aree uguali sull'Ellisse sono spazzate nello stesso tempo.

5. L' area spazzata dal vettore raggio R, in un determinato tempo, cioè la Velocità Areale della Circonferenza, è due volte quella dell'Ellisse relativa (come dettato dalla dinamica).
6. I valori del vettore SP (nella prima figura) sono compresi tra la distanza minima (perielio) e la distanza massima (afelio).
7. Velocità Angolare doppia sulla circonferenza rispetto alla velocità angolare sull'ellisse.
8. Il perimetro del quadrante della circonferenza di raggio R (prima figura), è uguale al perimetro del quadrante della Ellisse (per R=(q+m)/2), risolvendo l'esempio empirico: *«Se prendo un anello (di metallo e di raggio R) e lo stringo su due poli, l'anello si allarga assumendo la forma di una ellisse e più stringo più si allarga e notiamo che l'area originale della circonferenza tende a zero se continuiamo a stringere, mentre il suo perimetro rimane sempre uguale a quello dell'anello iniziale».*

ESEMPI NUMERICI:

ESEMPIO NUMERICO del **Punto 2.** Ponendo q=Afelio-Marte ed a m=Perielio-Marte si avrà R=227,9 e r=21,2 e le stesse distanze tra Sole e Marte calcolate da Tycho Brahe e interpretate da Keplero:

0°	206,7
10°	207,05
20°	208,1
40°	212,1

60°	218,07
90°	228,88
110°	235,39
120°	239,21

140°	244,52
160°	247,93
180°	249,1
270°	228,88

360°=0°

ESEMPIO NUMERICO del **Punto 3.** Sia una ellisse di semi-assi q=3 m=2 e i raggi di circonferenza R=2,5 e r=0,5; nel tempo t=(43,59111827 gg) si avrà $\frac{E}{2} = \frac{360°}{P}\, t = \frac{42°{,}96572823}{2} = 21°48286412$
(essendo P=365,24 gg Periodo di Rivoluzione).
Dalla circonferenza il Teorema del Carnot

$$\overline{SP}^2 = R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos 42{,}96572823 = 4{,}670596221$$

$$\overline{S'P}^2 = R^2 + r^2 + 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos 42{,}96572823 = 8{,}329403779$$

Dall'equazione dell'Ellisse

$$\overline{SP}^2 = m^2\, cos^2 21{,}48286412 + q^2\, sin^2 21{,}48286412 = 4{,}670596221$$

$$\overline{S'P}^2 = q^2\, cos^2 21{,}48286412 + m^2\, sin^2 21{,}48286412 = 8{,}329403779$$

ESEMPIO NUMERICO del **Punto 5.** Area Circonferenza doppia dell'Area Ellisse:

Area Ellisse per $E^R = \frac{42°,96572823 \cdot \pi}{180°}$; $\frac{qm}{2} E^R = \left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right) E^R = 2{,}249680269$

Area Circonferenza $(R^2 - r^2)E^R = 4{,}499360538$ (doppia).

ESEMPIO del **Punto 8.** Se l'ellisse della figura sopra la trascrivo ponendo il punto **S** nel centro del riferimento da cui siamo partiti, avrò la Fig.9b (coricata scambiando q con m): *cioè la serie di ellissi che si ottiene schiacciando la circonferenza sui poli.*

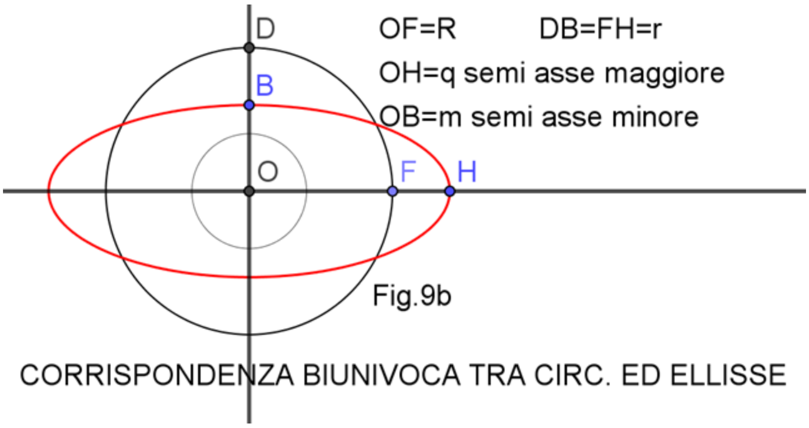


Fig.9b

Dalla formula in ***)**

2R=(R+r)+(R-r)=(q+m)

tenendo costante R e variando r, la somma dei valori di q ed m potranno variare, ma la loro somma risulterà costante per R, cioè (q+m)=2R.

ES.: 2R=8=(7+1)=(6+2)=(5+3)=(4+4)

l'ultima è q=m cioè l'ellisse come circonferenza.

Per r=0 OB=OF circonferenza; per r=R OF+FH=2R.

Vedere: ELLISI E CERCHIO CORRISPONDENTI in GeometriaParametrica Cap.VII "Area e Perimetro Ellisse" Pgg 11-14