CAP.II IL TEOREMA DEI PIANETI COME DISTANZA DI DUE PUNTI

Ecco l'enunciato del *Teorema dei Pianeti*, *fondamentale per il moto Astronomico, (per la dimostrazione vedi APPEND.1 e 2):*
"Data una circonferenza ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza è un raggio di Ellisse, la traiettoria (solo apparente) di una Ellisse e il punto-fisso il suo centro."
Il Teorema, puramente geometrico, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ellisse e Circonferenza e viceversa, che giustifica appieno la Legge del Moto Astronomico dei Pianeti.

Volendo procedere in modo analogo a quanto detto nel CAP.I L'OROLOGIO DI TYCO BRAHE analizziamo il comportamento di due punti A e B nello spazio, con una spiegazione algebrica, partendo dalla loro distanza, riferiti ad un **sistema gravitazionale** come quello Newtoniano, dove i corpi ruotano secondo *circonferenze* (Moto di Rivoluzione) e distanze ellittiche tra loro; vedi APPEND.25 (dimostrazione).

Per FIG.A1 FIG.2A i relativi applet:

AP023 CAP.II DISTANZA DI DUE PUNTI

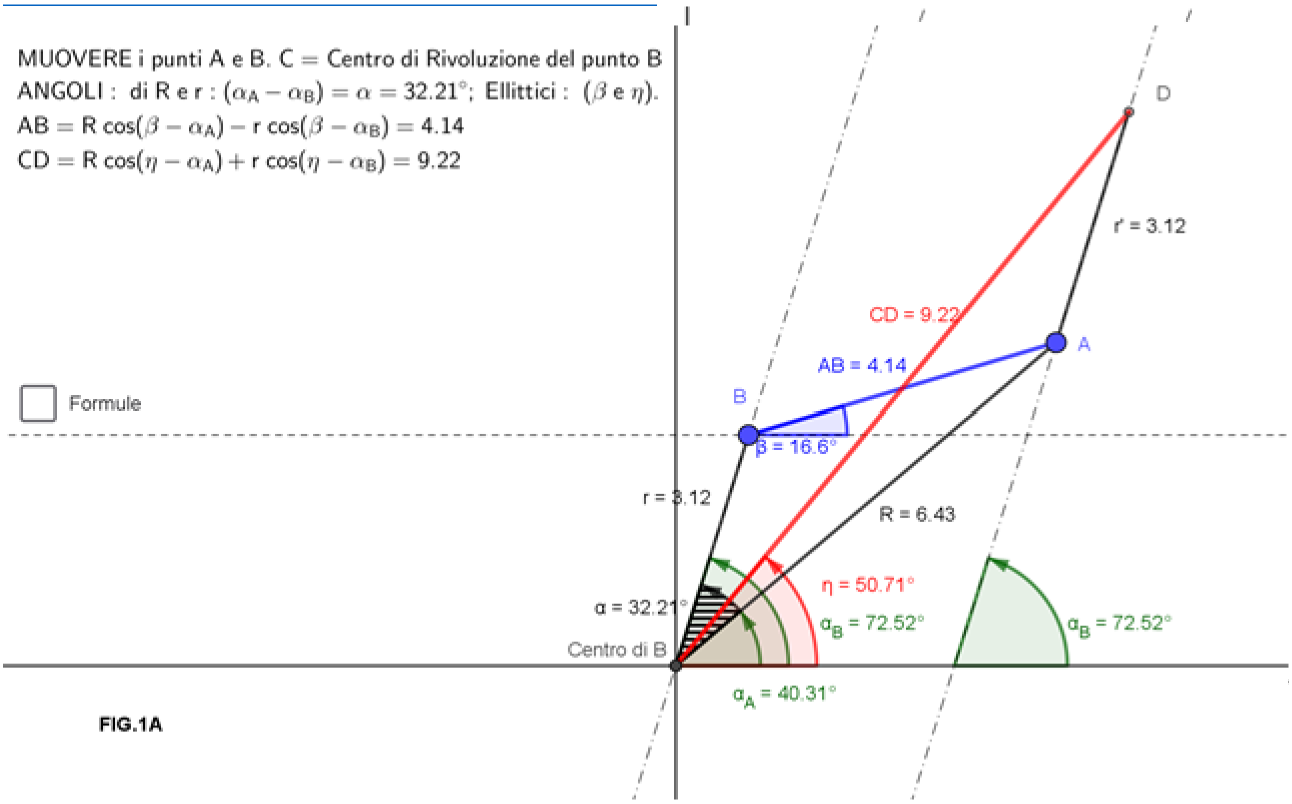


FIG.1A

Nello spazio siano due punti A e B di distanza AB noti. Scegliamo un punto qualsivoglia C e nel piano determinato da questi tre punti, prendiamo in considerazione una retta qualunque tra le infinite passanti per il punto C su quel piano; quindi una retta perpendicolare a tale retta in C, con cui creo un riferimento Cartesiano ortogonale come in figura 1A.

In tale riferimento con $R \neq r$ qualunque sia il valore di (R) e (r), e tali segmenti, sono solo funzione degli angoli $(\alpha_A \, e \, \alpha_B)$ con $|\alpha_A - \alpha_B| = \alpha$, da cui otteniamo le formule come indicate nella figura: il valore della distanza AB dato come risultato del "Teorema del coseno" in AB_2 e come equazione d'ellisse in AB_3; infatti in quest'ultima ipotesi le due distanze AB e CD, sviluppate diventano equazioni d'ellisse per (R-r)=m=asse-minore e (R+r)=q=asse-maggiore; dunque la **distanza di due punti AB e CD:**

$$AB = R\cos(\beta + \alpha_A) - r\cos(\beta + \alpha_B) = 3.97$$
$$CD = R\cos(\eta + \alpha_A) + r\cos(\eta + \alpha_B) = 9.38$$

può sempre essere espressa come equazione parametrica di una ellisse:

$$AB = \sqrt{(R-r)^2\cos^2(\alpha/2) + (R+r)^2\sin^2(\alpha/2))} = 3.97; \text{ come Raggio di Ellisse}$$

$$CD = \sqrt{(R+r)^2\cos^2(\alpha/2) + (R-r)^2\sin^2(\alpha/2)} = 9.38; \text{ come Raggio di Ellisse}$$

Si noti che nella distanza ellittica la distanza focale è $c^2 = q^2 - m^2 = 4Rr$.

****

Con il programma: "AP025 CAP.II DISTANZA TRA PIANETI E SATEL", come in FIG2A, desunto dal precedente programma visto, analizziamo le distanze tra un Pianeta Maggiore (es.Sole) e un Pianeta Minore (es.Terra) e un Satellite (Pianeta) di questo (es.Luna), e il loro moto: sempre dal punto di vista geometrico.

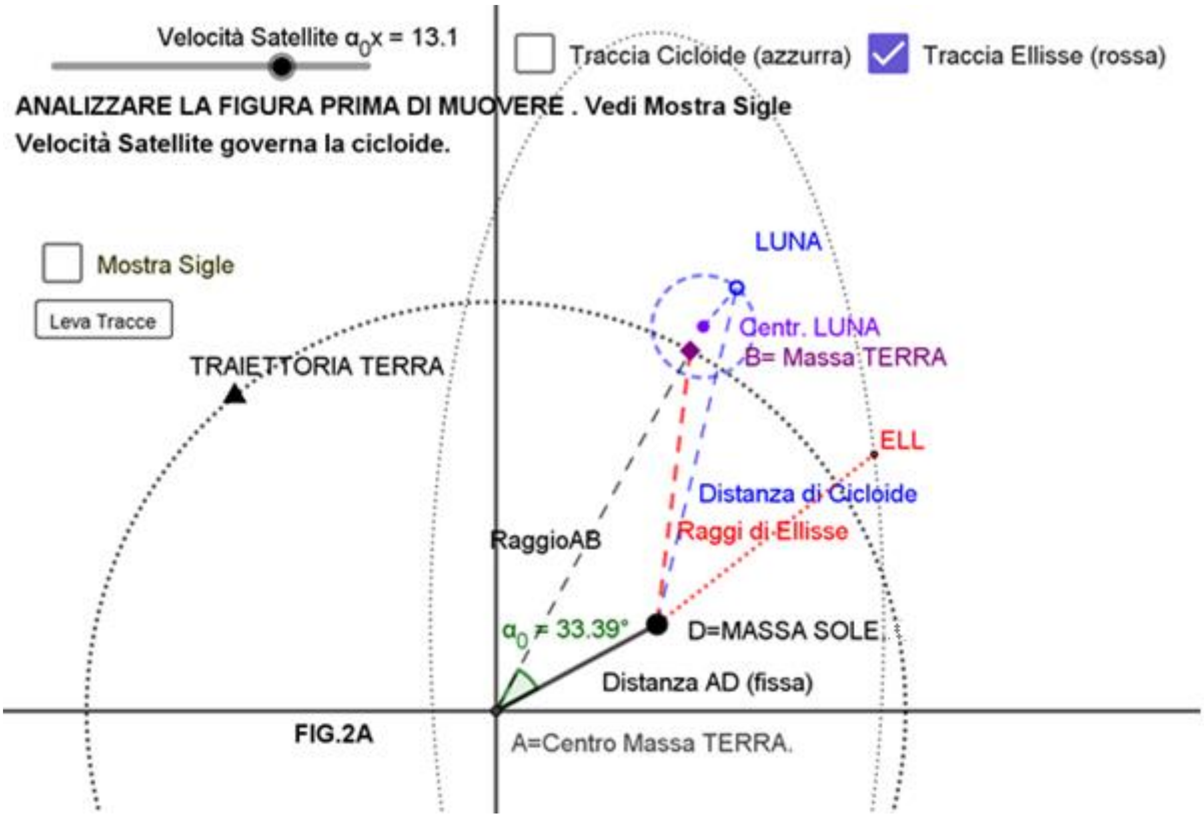


FIG.2A

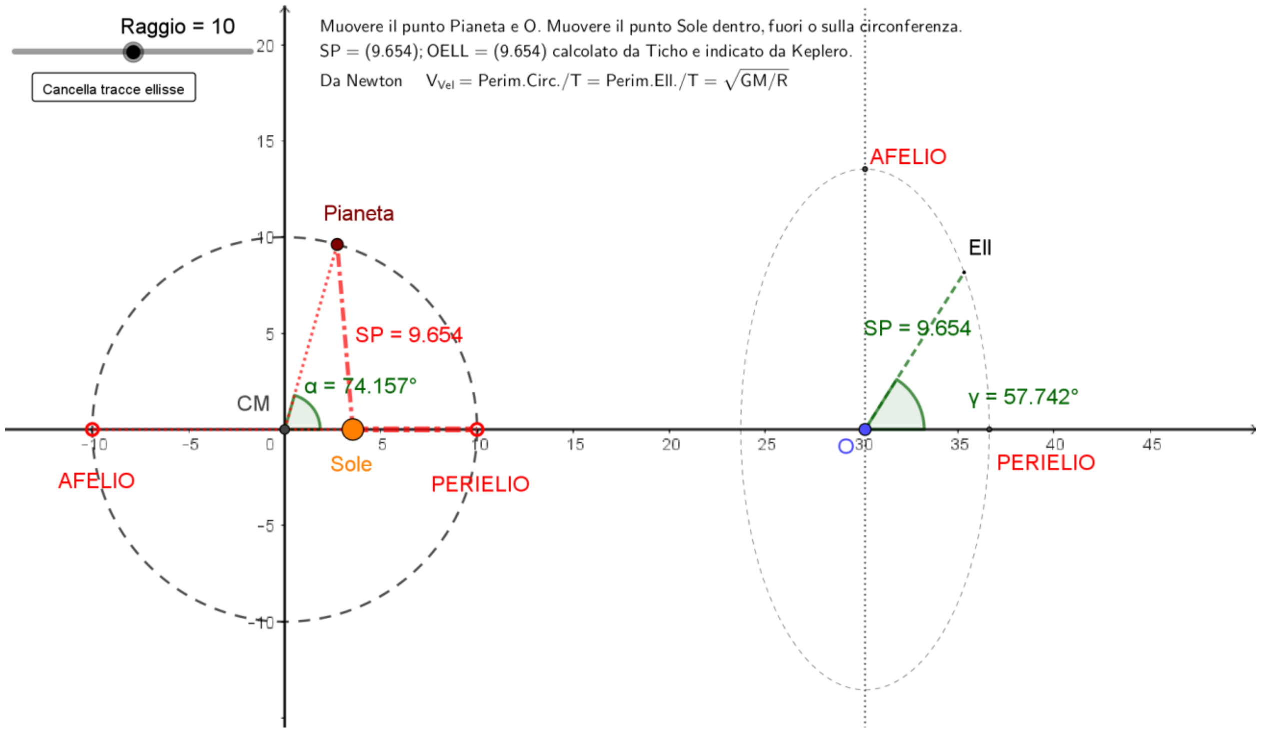
Consideriamo il moto circolare (traiettoria) del Punto Massa TERRA determinato dal valore α_0, dato dal moto del Raggio AB, rispetto

alla Distanza AD (considerata fissa) del Punto Massa SOLE: abbiamo che le distanze in rosso a linee tratteggiate, rappresentano una il raggio tra Pianeta SOLE e Pianeta TERRA; l'altra a puntini rossi, è il corrispettivo raggio di ellisse, che traccia una traiettoria delle distanze tra SOLE e TERRA, tale traiettoria è solo una costruzione algebrica del moto, che non esiste, perché non c'è nessun punto reale che la tracci (dimostrazione in APPEND.25).
Il Satellite Luna, ruota secondo una circonferenza ed ha anche lui distanza ellittica dal Punto Massa TERRA (secondo quanto stabilito dal Teorema dei Pianeti), ma dal Punto SOLE avrà distanza (in azzurro) ancora ellittica, ma **tracciata secondo una cicloide** (vedi avanti).
Le curve Ellisse e Cicloide sono tracciate dall' applet.

OSSERVAZIONE. «Se prendo un anello (di metallo ad esempio) e lo stringo su due poli, l'anello si allarga assumendo la forma di una ellisse e più stringo più si allarga. Notiamo che l'area originaria della circonferenza tende a zero se continuiamo a stringere, mentre il suo perimetro rimane sempre uguale a quello dell'anello iniziale».
Quest'ultima considerazione fornisce l'uguaglianza del perimetro dell'anello di raggio AD e dell'ellisse D-Ell, uguaglianza suffragata dal "Teorema dei Pianeti" con la relazione biunivoca tra circonferenza e la relativa ellisse.
Notiamo essere la velocità angolare nella circonferenza doppia della velocità angolare dell'ellisse.
M. Vaglieco
VAI SOMMARIO

CAP.III MOTO DI RIVOLUZIONE

Nel precedente CAP.II FIG.1A abbiamo analizzato l'accadimento di due punti A e B comunque presi e in un qualunque riferimento avere distanza ellittica, giusta l'intuizione di Keplero, senza dover supporre uno dei due punti vincolato al Fuoco di una ellisse.
Qui invece vogliamo dimostrare la validità del discorso di Newton analizzando geometricamente il moto di rivoluzione circolare di un Pianeta rispetto al Sole, posto dentro, fuori o sulla circonferenza, ottenuto dalla proiezione del Sole sul piano di rivoluzione del pianeta.
Un applet ci aiuta: [AP050 CAP.III MOTO DI RIVOLUZIONE]



Nella dimostrazione a seguire è affermato, analizzando l'App sopra, il secondo principio della dinamica, partendo proprio come fece Newton, dall'orbita circolare, dalla sua velocità areale costante e dalla forza centripeta che ne scaturisce; utilizzando proprio la terza legge di Keplero, otteniamo il modulo della forza Sole-Pianeta

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

Dall' applet in figura vediamo che la velocità angolare dell'orbita circolare è doppia di quella mostrata nell'ellisse; che la posizione del Sole dentro e fuori l'orbita ha distanze ellittiche rispetto al Pianeta; che nel caso del Sole coincidente con il Perielio, questi risulterà zero e l'Afelio avrà il valore del perimetro dell'ellisse, presentato come segmento.
Nella nostra ipotesi abbiamo posto il Sole sullo stesso piano dell'orbita di rivoluzione, ma il Teorema dei P. ci dice che il punto Sole può essere posto ovunque e che la sua proiezione sul piano orbitale darà comunque una delle ipotesi adottata (dentro, fuori o sul Perielio), considerata per mera comodità illustrativa:

il risultato vero è in tal caso (e non necessariamente) dato secondo quanto indicato dal teorema citato.

- Abbiamo finalmente una teoria applicabile a tutto il sistema planetario: la Terra ha distanze ellittiche con i Sole, ma ha anche distanze ellittiche con qualunque altra stella.
- La costanza delle aree nell' ellisse, deducibili dalle formule di calcolo delle aree vedi avanti: "CAP.IV "AREE UGUALI IN TEMPI UGUALI"
- il perimetro dei quadranti della circonferenza di raggio R dedotto dal teorema è uguale a quello dell'ellisse, ma non i suoi valori intermedi[1]
- Poichè le **distanze Sole Pianeta** sono comprese tra un Afelio e un Perielio, esse sono le stesse distanze calcolate allora da Ticho Brahe per Marte e riconfermate, anche per tutti i Pianeti (Tabella di TICHO).
- Vedremo essere esatta l'uguaglianza:

$$F = G\frac{mM}{d^2} = m\frac{V^2}{d} \quad che\ vale\ V = \sqrt{\frac{GM}{d}} = \frac{P_{erimetro\ Ellisse}}{T} = \frac{P_{erimetro\ Circonferenza}}{T};$$

Newton spiega l'interazione tra due masse (Problema dei due corpi) ma non spiega il moto di ciascuna rispetto all'altra, problema che fu risolto arbitrariamente ponendo il Sole nel punto-fuoco di una ellisse. Ora invece, vediamo che tutti i pianeti ruotano secondo circonferenze ma con distanze ellittiche uno dall'altra: Terra distanza ellittica dal Sole; Luna distanza ellittica dalla Terra ma distanza cicloide (ellittica) dal Sole.

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

[1] Geometria Parametrica.it (CAP. VII Area e Perimetro Ellisse)