LEGGE DEL MOTO DEI PIANETI.

I Pianeti ruotano secondo proprie Orbite Circolari e tutti uno rispetto all'altro, conservano distanze ellittiche.

SOMMARIO

INTENTO

Quando a Keplero domandavano come poteva reggere la sua teoria dei corpi che si muovono secondo ellissi e non con moto circolare, la sua risposta era semplice e coerente:
«La mia dimostrazione è consona ai risultati empirici della loro distanza: se qualcuno può dimostrare questo in modo diverso lo dimostri».
La soluzione di Keplero era «inossidabile»: i pianeti avevano distanze ellittiche (il paragone era sempre riferito al Sole ed a un Pianeta) e il Sole poteva occupare soltanto un fuoco di tale conica *fino a prova contraria*.
Newton fu la prima prova contraria con la sua tesi di una Forza Gravitazionale Universale che governa il moto dei Corpi Celesti. Apparentemente non mise in discussione la teoria di K., perché basata su risultati fisici, ma certo non li appoggiò anzi progredì nella sua teoria di una forza universale, la cui gravità teneva unite in modo logico le masse.
A logica, il concetto della gravità contrasta con un moto ellittico, dove due masse, di valore fisso, una volta sono vicine e una volta lontane tra loro: come se la gravità potesse essere più forte a destra (sic) che a sinistra o viceversa.
Newton da vero matematico proseguì sulla sua indagine conoscitiva, dimostrando la validità della Teoria Gravitazionale, cioè di una forza esattamente bilanciata in una accelerazione centripeta, prescindendo dalla incongruenze di K. di un Sole nel fuoco di una ellisse, perseguendo la tesi di corpi che ruotavano secondo circonferenze e quindi intorno ad un punto (Centro di Massa).
In realtà Keplero dà la soluzione semplicemente interpretando i dati (Tycho) ma è Newton che ne indica il percorso: entrambi avevano ragione, ciascuno per la sua parte.
Nel sistema Pianeta-Sole il modulo della Forza fu espresso:

$$F = G\frac{m\,M}{d^2} \qquad \text{a)}$$

dove m e M sono le masse, G la costante gravitazionale, (d) la distanza: diciamo che d è la parte equivoca del sistema essendo essa raggio di ellisse per Keplero e raggio di circonferenza per Newton. A nessuno è mai venuto in mente che entrambi avessero ragione: ma un teorema di geometria li mette d'accordo entrambi.
"IL TEOREMA DEI PIANETI":
«Un punto (Punto Massa) che si muove secondo una circonferenza di centro C.M. (Centro di Massa) rispetto a qualunque altro punto (che non sia sulla retta perpendicolare al centro della circonferenza e che possiamo supporre fermo, ma questo non inficia il problema) mantiene una distanza ellittica.»
Facciamo un esempio pragmatico ed esemplificativo: prendo il sole all'equatore: la traiettoria che traccio o rivoluzione, è una circonferenza il cui centro è il centro della sfera (geosfera); rispetto al polo nord la mia distanza è costante, deduco quindi che mi muovo rispetto al polo secondo una distanza fissa, presumo una circonferenza.

NO! in realtà mi muovo ancora secondo la circonferenza equatoriale con distanza costante rispetto al polo nord, cioè secondo una presunta circonferenza datami solo dalla distanza non da una traccia o curva di circonferenza che non esiste.
Se poi, come punto fermo prendo un punto, non sulla retta PoloNord-Centro, ma fuori della sfera, avrò una distanza conica, che è quella della ellisse[1]. Anche questa volta la mia traiettoria non è cambiata (e questa è la tesi di Newton) è sempre circolare ma le distanze del nuovo Punto hanno distanze ellittiche (prova della tesi di Keplero) (Vedi APPEND.1).

"IL TEOREMA" in questione, dimostrando una corrispondenza biunivoca tra circonferenza ed ellisse e altro ancora, è un teorema fondamentale che dà la giusta legge al Moto dell'Universo.
Nella dimostrazione del CAP.II "IL TEOREMA DEI PIANETI COME DISTANZA DI DUE PUNTI" si analizza il comportamento di due punti nello spazio, che possono essere sempre interpretati come distanze ellittiche, se riferiti ad un sistema gravitazionale come quello Newtoniano, dove *i corpi ruotano secondo circonferenze* (Moto di Rivoluzione).
Dallo stesso Teorema deduco che ogni circonferenza può essere rappresentata da una corrispondente ellisse, di eguale perimetro (APPEND.7); che la velocità angolare della circonferenza è doppia di quella della ellisse; che la velocità media della circonferenza è uguale a quella della ellisse.
Ma pur avendo eguale perimetro tra ellisse e circonferenza, non abbiamo archi uguali e che pertanto i punti di Afelio e Perielio nella ellisse corrispondente, hanno velocità diverse (vedi: CAP.III MOTO DI RIVOLUZIONE); che l'accelerazione centripeta genera orbite circolari; e che tutti i corpi si comportano allo stesso modo rispetto a qualunque Punto (= Stella):

TERRA===>SOLE; LUNA===>TERRA LUNA===>SOLE
TERRA===>VENERE

sintetizzati in: $F = G\frac{m\,M}{d^2} = m\frac{V^2}{d}$ da cui la velocità:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{d}} = \frac{Perimetro\ Circonferenza}{T_{Periodo}} = \frac{Perimetro\ Ellisse}{T_{Periodo}}$$

Nel caso (Luna-Sole) la traiettoria circolare della Luna avviene attorno alla Terra e questa intorno al Sole e quindi il C.M. della Luna ruota secondo una propria circonferenza rispetto al Sole e le sue distanze dal Sole sono una vera e propria cicloide su circonferenza (Cicloide: IPO-Epicicloide), secondo la definizione geometrica (su Google: LE CICLOIDI Definizione geometrica.)

---

[1] *Un punto (S) fuori della sfera può essere proiettato sul piano della circonferenza (dentro, fuori o sul limite) con distanza (p) e calcolato sul piano della circonferenza equatoriale dal Teorema, come distanza ellittica data dagli assi (a) e (b) e quindi rispetto al punto (S) con assi* $(a') = \sqrt{p^2 + a^2}$ *asse maggiore e* $(b') = \sqrt{p^2 + b^2}$ *asse minore.*

Per (Terra-Venere) è sufficiente osservare che le traiettorie dei due Pianeti sono circolari e che preso un qualunque punto di Venere (oppure Terra, nel caso opposto), tutte le sue distanze dalla Terra sono raggi di ellisse; quindi tutti i punti della traiettoria di Venere hanno distanze ellittiche dalla Terra: questo è dato dalla loro rivoluzione circolare e non dipende da nessun altro parametro (velocità, massa, ecc.).

Il moto determinato dalla forza di Gravitazione Universale come è inteso da Newton è una rivoluzione circolare dovuta a tutta la massa Planetaria nel suo insieme, in cui ciascuna singola massa-pianeta, ruoterà ciascuna secondo un proprio centro [Centro di Massa] e secondo un proprio spazio, sempre governato dalla forza di gravitazione, con distanze variabile tra Pianeta e Pianeta, di valore ellittico, in armonia con il piano generale di rivoluzione di tutto l'insieme dei Pianeti.

La rivoluzione di ciascun Pianeta avviene su un piano ed essendo circolare determina un M**oto Rotatorio** dello stesso Pianeta. Pertanto se il centro di rotazione e il baricentro della massa - pianeta coincidono, l'asse di rotazione ruoterà perpendicolarmente al piano di rivoluzione; se invece non coincidono, il baricentro tenderà a girare ad una distanza diversa dal centro del pianeta, determinando la relativa inclinazione dell'asse di rotazione rispetto al piano di rivoluzione.
Proseguendo nella nostra indagine dal "CAP.VIII MOTO SATELLITARE" diamo una spiegazione logica e matematica al lancio di un satellite, in quanto anche il satellite deve sottostare alle stesse leggi a cui sono sottoposti i Pianeti.
Gli aggiornamenti di geometria quali "CAP.IX RIDEFINIZIONE DELLA PARABOLA" e "CAP.X EQUAZIONE DELLA PARABOLA PARAMETRICA" facilitano una spiegazione corretta del "CAP.XI TRAIETTORIA PARABOLICA DI UN SATELLITE con ESEMPI"; concludendo con il "CAP.XII PARABOLA DEL MOTO TRAMITE UNA SUA TANGENTE O ALZO": tenendo sempre presente il moto rivoluzionario dei pianeti e la loro distanza ellittica.

Gli aggiornamenti di geometria indicati sopra, determinano un'altra considerazione: Albert Einstein ha ipotizzato che la massa di un corpo provoca una curvatura nello spazio-tempo, tale che un Corpo più piccolo tende a ruotare intorno al corpo più grande fino a collidere oppure a sfuggire ad esso; la Geometria Parametrica, come vedremo avanti, ne dà una dimostrazione geometrica proprio mediante le "Cicloidi di Vag" (vedi Google), fondamentali per il moto astronomico.

M. Vaglieco

CAP.I L'OROLOGIO DI TYCHO BRAHE

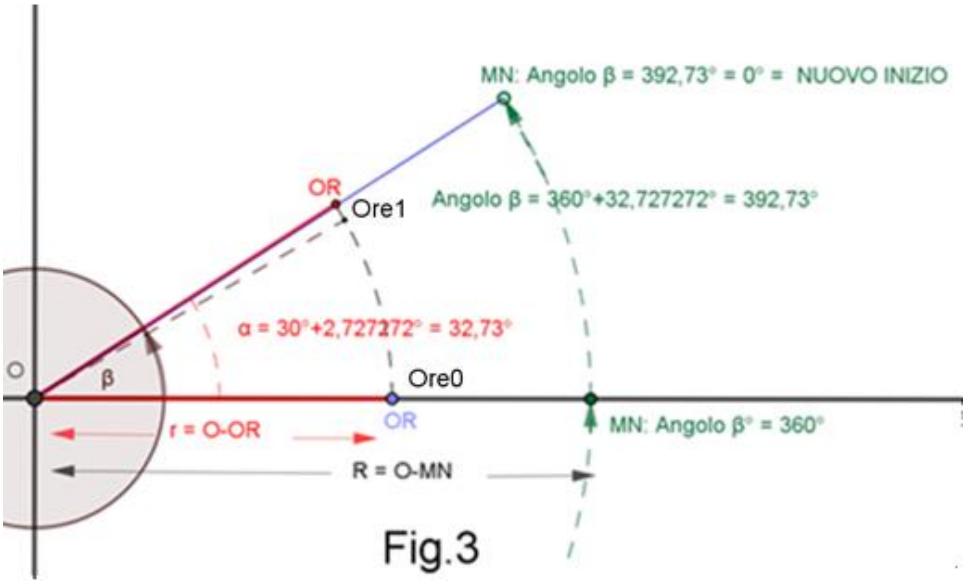


Fig.3

Tycho Brahe osservando un orologio gli venne fantasia di usarlo come modello per il moto astronomico. Pensò, in un sistema, di far girare le lancette dell'orologio, con moto antiorario, e di calcolare l'ora non dalla posizione nel quadrante (ore1,ore2, ………., ore12) ma, ogni volta, dall'allineamento delle lancette. Pensò di calcolare la distanza tra l'estremo della lancetta (R) dei minuti e il suo punto estremo (MN) e la lancetta delle ore (r) e il suo punto estremo (OR): indicati nella Fig.3 con R=O-MN in nero e r=O-CR in rosso.

Per avere sempre le stesse condizioni di partenza (cioè l'allineamento) il punto MN, dopo un giro di 360°, si deve riallineare con OR, che nel frattempo si è mosso non di 30° (portandosi a Ore1 della Fig.) ma di α°=32,7272° (per effetto di Achille e la Tartaruga) percorrendo in tutto β=360°+32,727272°=392,7272° come indicato[2].
Ma l'angolo totale tra le due lancette, ha sempre valore E=β°-α°= (392,7272-32,7272=360°), e fornisce tutti i valori compresi tra 0°a 360° della distanza dei due estremi OR e MN come $\rho = (\overline{OR - MN})$, e quindi applicando il Teorema dei coseni o di Carnot alle lancette otteniamo:

$$\rho = (\overline{OR - MN}) = \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos E}$$

Ticho provò a dare alle lancette i valori R=227,9 e r=21,2 dedotte dal Pianeta Marte con (R+r)=Afelio=249,1 e (R-r)=Perielio=206,7 e ottenne la Tabella che vediamo a seguire:
Con suo grande stupore si accorse che i valori ρ della prima colonna erano del tutto uguali a quelli delle distanze tra il OR=Sole e MN=Marte, da lui calcolate.

---

[2] *32,7272x11=359,992 anziché 30x12=360° dif. 0,0008*
392,7272X11=4319,992 " 360X12=4320 " 0,0008

Analogamente provò con i valori (R=149,6; r=2,5; R+r=152,1; R-r=147,1) e la seconda colonna di ρ diede i valori delle distanze Sole-Terra e questo risultato lo ottenne anche per le distanze di qualunque Sole-Pianeta, per i relativi valori di R e r di ciascun Pianeta: esempio Venere R=108,2 e r=0,8; Mercurio R=57,8 e r=11,90 eccetera……

E°	$\rho = Marte$	$\rho = Terra$	$\rho = Venere$	ρ=Mercurio	
0°	206,7	147,1	107,4	45,9	R-r = Perielio
10°	207,05	147,14	107,42	46,12	
20°	208,1	147,25	107,44	46,79	
40°	212,1	147,69	107,80	49,28	
60°	218,07	148,37	108,61	52,86	
90°	228,88	149,62	108,20	59,01	$\sqrt{R^2+r^2}$
110°	235,39	150,47	108,48	62,87	
120°	239,21	150,87	108,61	64,57	
140°	244,52	151,52	108,81	67,35	
160°	247,93	151,95	108,95	69,10	
180°	249,1	152,1	109,00	69,7	R+r = Afelio
270°	228,88	149,62	108,20	59,01	$\sqrt{R^2+r^2}$
360°	206,7	147,1	107,4	45,9	R-r = Perielio

Nella spiegazione di Fig.3 abbiamo indicato che il conteggio per la nuova partenza ricomincia quando i raggi delle due circonferenze coincidono e per tale ragione il raggio della lancetta dei minuti percorre un arco maggiore di 360° (360°+32,72=392,72). Il valore 32,72 è la «Longitudine al Perielio»; ma nel nuovo calcolo in tabella è un valore proprio di ciascun Pianeta e indica il numero di gradi occorrenti per riottenere l’allineamento tra un Pianeta (MN) con il Sole (OR); tale sfasamento (minimo) è dovuto al moto del Sole e non influenza la distanza di riallineamento tra Pianeta (MN) e Sole(OR) sempre compresa in 360°.

Nella letteratura questo valore è sommato all’asse minore dell’ellisse di un Pianeta per rimetterlo in linea di partenza con il Sole, vedi:
AP010 CAP.I LONGITUDINE ELLISSE

Come era possibile?

Ticho Brahe non risolse il quesito.

Il resto è storia: il brillante **Keplero** dai dati di ρ, della prima colonna (quella di Marte), giustamente interpretò che i Pianeti si muovevano intorno al Sole secondo raggi di Ellisse.
Andò oltre, e ci lasciò in eredità la figura di una ellisse come moto di un Pianeta, e come conseguenza il Sole posto nel Fuoco di tale ellisse.
Ma ora, con l'esempio dell'orologio dove è l'ellisse di Marte o della Terra, rispetto al Centro di Massa di ciascun Pianeta?
Una soluzione ci è data dalla dimostrazione di un Teorema di Geometria, che utilizzando la distanza Massima e Minima di ciascun Pianeta dal Sole o da un qualunque altro Pianeta, fornisce i valori di R e r: nel caso particolare del Sole e un Pianeta, come abbiamo visto sopra abbiamo:

(R+r)=Afelio (R-r)=Perielio

La lettura del Teorema indicato, dà anche la dimostrazione algebrica di un sistema di primo grado a due incognite e anche la soluzione del Teorema dei Coseni o di Carnot i cui punti estremi dei due segmenti (R,r) valgono giustappunto un raggio di ellisse di semi assi a e b, per (R+r)=a e (R-r)=b:

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha = (R+r)^2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) + (R-r)^2\cos^2(\frac{\alpha}{2})$$

E' da notare che nell'esempio ispirato dal moto dell'orologio, si è fatto una suddivisione a dodici ore, mentre nella realtà, essa è di 24 ore (cioè un giorno); tale arbitraria suddivisione non altera il valore della dimostrazione. Infatti nella tabella delle distanze dei Pianeti mostrata, queste sono esatte, perché la suddivisione temporale a 12 o 24 partizioni si riferisce sempre entro l'unico valore di 360°. Nella partizione a 24 cambia solo la longitudine al Perielio che da 32,72° diventa 16,36°, cioè una maggiore suddivisione di 360°.
Nel successivo CAP.II diamo la spiegazione geometrica di quanto detto!
M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CAP.II IL TEOREMA DEI PIANETI COME DISTANZA DI DUE PUNTI

Ecco l'enunciato del Teorema dei Pianeti, fondamentale per il moto Astronomico, (per la dimostrazione vedi APPEND.1 e 2):
"Data una circonferenza ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza è un raggio di Ellisse, la traiettoria (solo apparente) di una Ellisse e il punto-fisso il suo centro."
Il Teorema, puramente geometrico, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra Ellisse e Circonferenza e viceversa, che giustifica appieno la Legge del Moto Astronomico dei Pianeti.

Volendo procedere in modo analogo a quanto detto nel CAP.I L'OROLOGIO DI TYCO BRAHE analizziamo il comportamento di due punti A e B nello spazio, con una spiegazione algebrica, partendo dalla loro distanza, riferiti ad un **sistema gravitazionale** come quello Newtoniano, dove i corpi ruotano secondo *circonferenze* (Moto di Rivoluzione) e distanze ellittiche tra loro; vedi APPEND.25 (dimostrazione).

Per FIG.A1 FIG.2A i relativi applet:
AP023 CAP.II DISTANZA DI DUE PUNTI

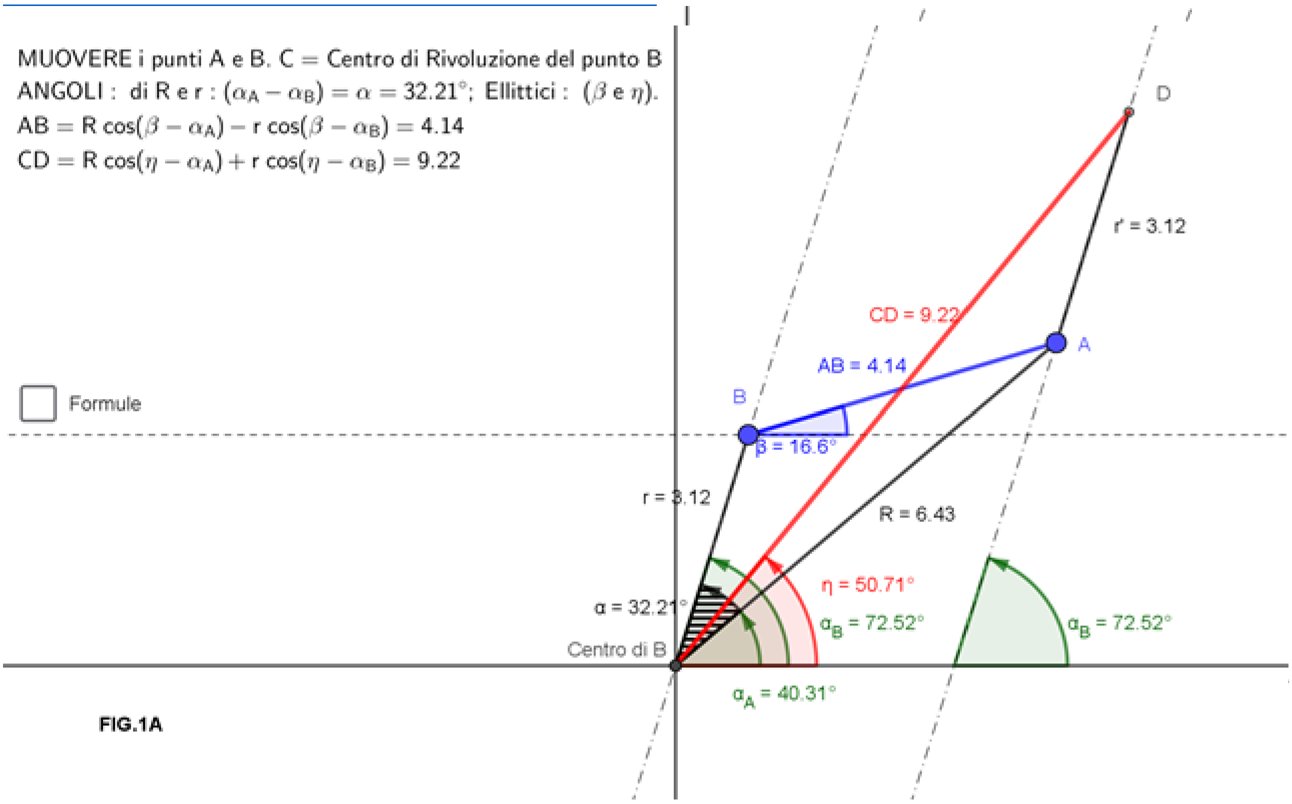


FIG.1A

Nello spazio siano due punti A e B di distanza AB noti. Scegliamo un punto qualsivoglia C e nel piano determinato da questi tre punti, prendiamo in considerazione una retta qualunque tra le infinite passanti per il punto C su quel piano; quindi una retta perpendicolare a tale retta in C, con cui creo un riferimento Cartesiano ortogonale come in figura 1A.

In tale riferimento con $R \neq r$ qualunque sia il valore di (R) e (r), e tali segmenti, sono solo funzione degli angoli $(\alpha_A \, e \, \alpha_B)$ con $|\alpha_A - \alpha_B| = \alpha$, da cui otteniamo le formule come indicate nella figura: il valore della distanza AB dato come risultato del "Teorema del coseno" in AB_2 e come equazione d'ellisse in AB_3; infatti in quest'ultima ipotesi le due distanze AB e CD, sviluppate diventano equazioni d'ellisse per (R-r)=m=asse-minore e (R+r)=q=asse-maggiore; dunque la **distanza di due punti AB e CD:**

$$AB = R\cos(\beta + \alpha_A) - r\cos(\beta + \alpha_B) = 3.97$$
$$CD = R\cos(\eta + \alpha_A) + r\cos(\eta + \alpha_B) = 9.38$$

può sempre essere espressa come equazione parametrica di una ellisse:

$$AB = \sqrt{(R-r)^2\cos^2(\alpha/2) + (R+r)^2\sin^2(\alpha/2))} = 3.97; \text{ come Raggio di Ellisse}$$
$$CD = \sqrt{(R+r)^2\cos^2(\alpha/2) + (R-r)^2\sin^2(\alpha/2)} = 9.38; \text{ come Raggio di Ellisse}$$

Si noti che nella distanza ellittica la distanza focale è $c^2 = q^2 - m^2 = 4Rr$.

****

Con il programma: "AP025 CAP.II DISTANZA TRA PIANETI E SATEL", come in FIG2A, desunto dal precedente programma visto, analizziamo le distanze tra un Pianeta Maggiore (es.Sole) e un Pianeta Minore (es.Terra) e un Satellite (Pianeta) di questo (es.Luna), e il loro moto: sempre dal punto di vista geometrico.

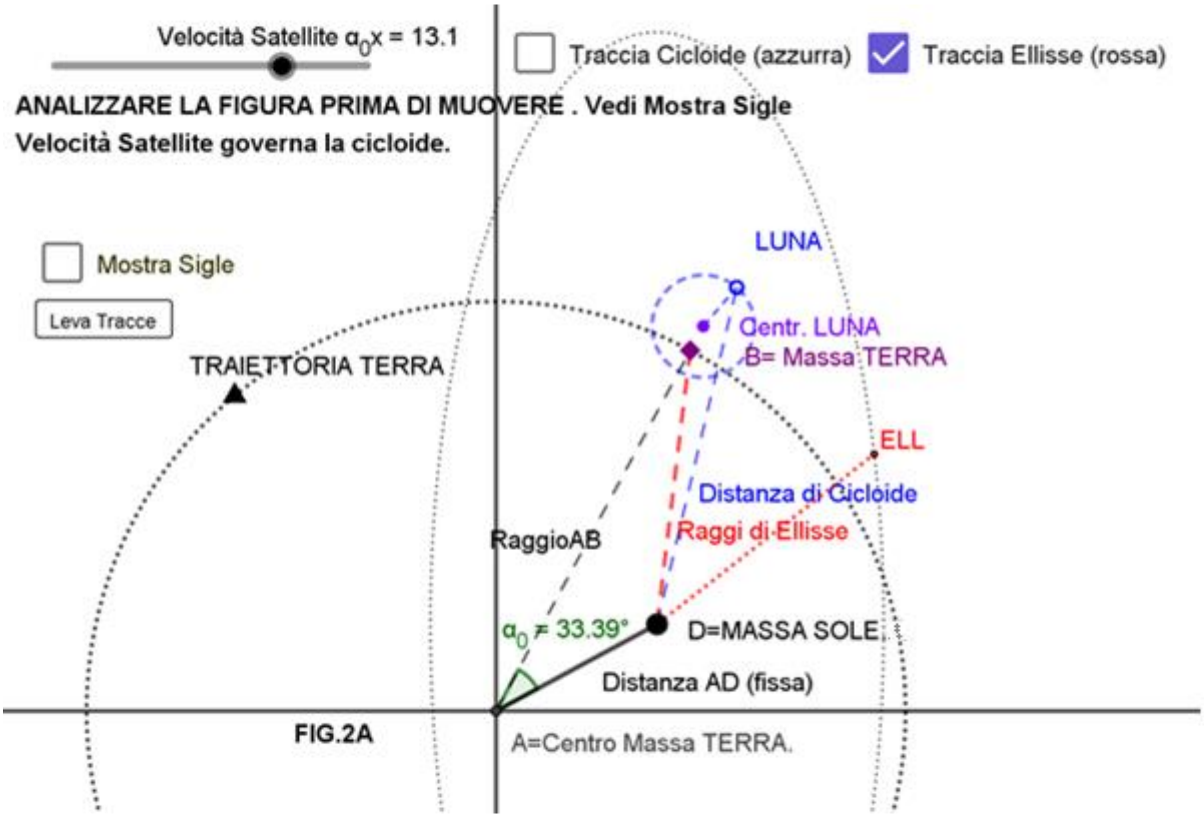


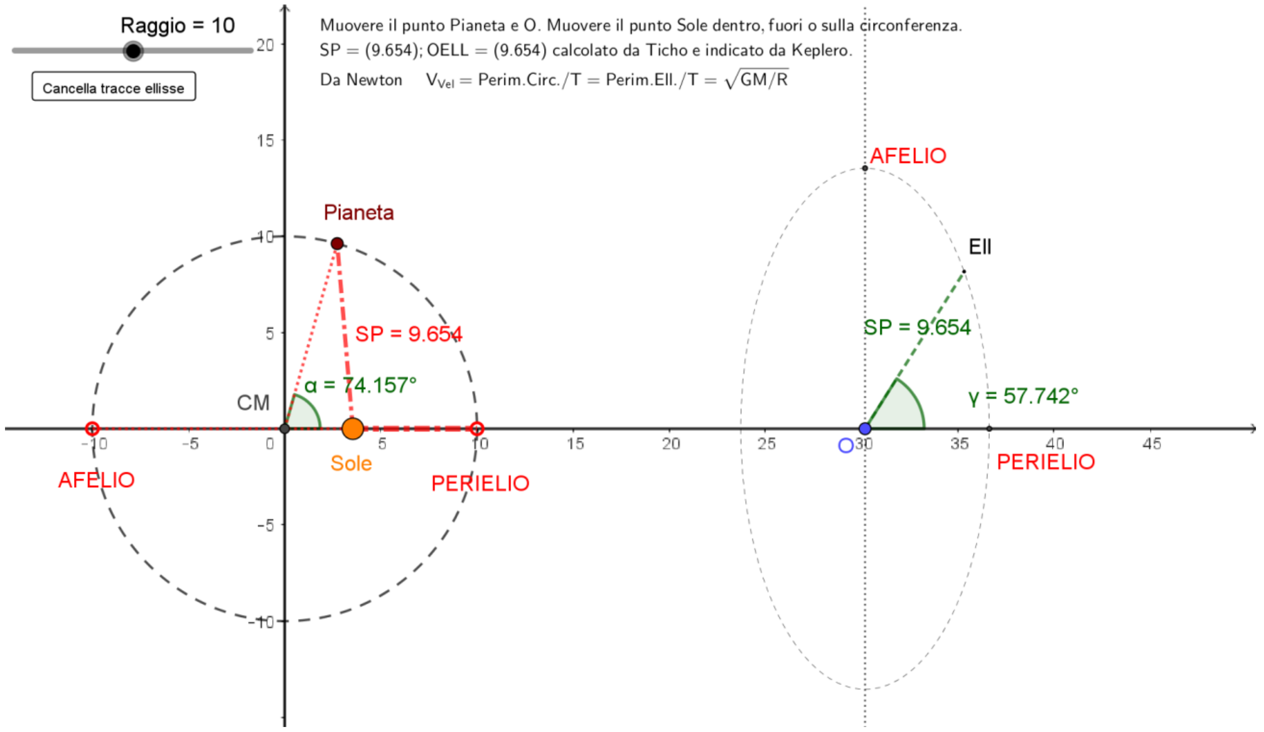
FIG.2A

Consideriamo il moto circolare (traiettoria) del Punto Massa TERRA determinato dal valore α_0, dato dal moto del Raggio AB, rispetto alla Distanza AD (considerata fissa) del Punto Massa SOLE: abbiamo che le distanze in rosso a linee tratteggiate, rappresentano una il raggio tra Pianeta SOLE e Pianeta TERRA; l'altra a puntini rossi, è il corrispettivo raggio di ellisse, che traccia una traiettoria delle distanze tra SOLE e TERRA, tale traiettoria è solo una costruzione algebrica del moto, che non esiste, perché non c'è nessun punto reale che la tracci (dimostrazione in APPEND.25).
Il Satellite Luna, ruota secondo una circonferenza ed ha anche lui distanza ellittica dal Punto Massa TERRA (secondo quanto stabilito dal Teorema dei Pianeti), ma dal Punto SOLE avrà distanza (in azzurro) ancora ellittica, ma **tracciata secondo una cicloide** (vedi avanti).
Le curve Ellisse e Cicloide sono tracciate dall' applet.

OSSERVAZIONE. «Se prendo un anello (di metallo ad esempio) e lo stringo su due poli, l'anello si allarga assumendo la forma di una ellisse e più stringo più si allarga. Notiamo che l'area originaria della circonferenza tende a zero se continuiamo a stringere, mentre il suo perimetro rimane sempre uguale a quello dell'anello iniziale».
Quest'ultima considerazione fornisce l'uguaglianza del perimetro dell'anello di raggio AD e dell'ellisse D-Ell, uguaglianza suffragata dal "Teorema dei Pianeti" con la relazione biunivoca tra circonferenza e la relativa ellisse.
Notiamo essere la velocità angolare nella circonferenza doppia della velocità angolare dell'ellisse.
M. Vaglieco
VAI SOMMARIO

CAP.III MOTO DI RIVOLUZIONE

Nel precedente CAP.II FIG.1A abbiamo analizzato l'accadimento di due punti A e B comunque presi e in un qualunque riferimento avere distanza ellittica, giusta l'intuizione di Keplero, senza dover supporre uno dei due punti vincolato al Fuoco di una ellisse.
Qui invece vogliamo dimostrare la validità del discorso di Newton analizzando geometricamente il moto di rivoluzione circolare di un Pianeta rispetto al Sole, posto dentro, fuori o sulla circonferenza, ottenuto dalla proiezione del Sole sul piano di rivoluzione del pianeta.
Un applet ci aiuta: [AP050 CAP.III MOTO DI RIVOLUZIONE]



Nella dimostrazione a seguire è affermato, analizzando l'App sopra, il secondo principio della dinamica, partendo proprio come fece Newton, dall'orbita circolare, dalla sua velocità areale costante e dalla forza centripeta che ne scaturisce; utilizzando proprio la terza legge di Keplero, otteniamo il modulo della forza Sole-Pianeta

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

Dall' applet in figura vediamo che la velocità angolare dell'orbita circolare è doppia di quella mostrata nell'ellisse; che la posizione del Sole dentro e fuori l'orbita ha distanze ellittiche rispetto al Pianeta; che nel caso del Sole coincidente con il Perielio, questi risulterà zero e l'Afelio avrà il valore del perimetro dell'ellisse, presentato come segmento.
Nella nostra ipotesi abbiamo posto il Sole sullo stesso piano dell'orbita di rivoluzione, ma il Teorema dei P. ci dice che il punto Sole può essere posto ovunque e che la sua proiezione sul piano orbitale darà comunque una delle ipotesi adottata (dentro, fuori o sul Perielio), considerata per mera comodità illustrativa:

il risultato vero è in tal caso (e non necessariamente) dato secondo quanto indicato dal teorema citato.

- Abbiamo finalmente una teoria applicabile a tutto il sistema planetario: la Terra ha distanze ellittiche con i Sole, ma ha anche distanze ellittiche con qualunque altra stella.
- La costanza delle aree nell' ellisse, deducibili dalle formule di calcolo delle aree vedi avanti: "CAP.IV "AREE UGUALI IN TEMPI UGUALI"
- il perimetro dei quadranti della circonferenza di raggio R dedotto dal teorema è uguale a quello dell'ellisse, ma non i suoi valori intermedi[3]
- Poichè le **distanze Sole Pianeta** sono comprese tra un Afelio e un Perielio, esse sono le stesse distanze calcolate allora da Ticho Brahe per Marte e riconfermate, anche per tutti i Pianeti (Tabella di TICHO).
- Vedremo essere esatta l'uguaglianza:

$$F = G\frac{mM}{d^2} = m\frac{V^2}{d} \quad che\ vale\ V = \sqrt{\frac{GM}{d}} = \frac{P_{erimetro\ Ellisse}}{T} = \frac{P_{erimetro\ Circonferenza}}{T};$$

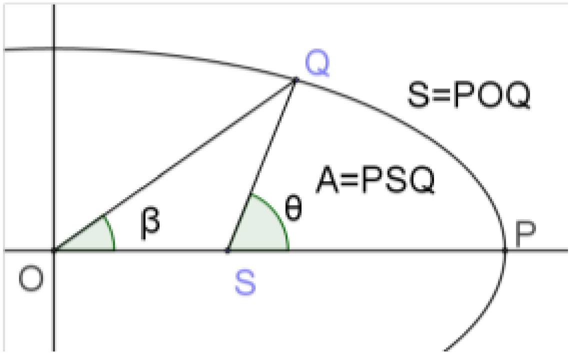
Newton spiega l'interazione tra due masse (Problema dei due corpi) ma non spiega il moto di ciascuna rispetto all'altra, problema che fu risolto arbitrariamente ponendo il Sole nel punto-fuoco di una ellisse. Ora invece, vediamo che tutti i pianeti ruotano secondo circonferenze ma con distanze ellittiche uno dall'altra: Terra distanza ellittica dal Sole; Luna distanza ellittica dalla Terra ma distanza cicloide (ellittica) dal Sole.

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

[3] *Geometria Parametrica.it* (CAP. VII Area e Perimetro Ellisse)

CAP.IV AREE UGUALI IN TEMPI UGUALI (proprietà dell'ellisse) 'Anomalia Media' e II° Legge di Keplero



Nella parte APPENDICE è la dimostrazione delle proprietà dell'ellisse, che qui riassumiamo con l'ellisse di parametri q>m semi assi, (q) su ascissa e (x=q cosE; y=m sinE):

APPEND.3 AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

Il valore dell'area dell'ellisse è data sia geometricamente che mediante integrazione per parti dei valori parametrici.

(*Allo stesso modo dell'ellisse è ricavabile l'AREA dell'Iperbole mediante integrazione per parti dei suoi valori parametrici:*
$(x = \frac{q}{\cos E}; y = m \tan E)$ *con q>m assi e raggi dell'iperbole:*

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{q}{\cos E}\right)^2 + (m \tan E)^2} = \sqrt{\frac{q^2+(m \sin E)^2}{(\cos E)^2}} = \sqrt{\frac{c^2-(m \cos E)^2}{(\cos E)^2}} \ ; \ c^2 = q^2 + m^2$$

e le sue varianti rispetto al fuoco.)

APPEND.4 AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

APPEND.5 PROPRIETA' DELLE AREE DELL'ELLISSE

(con $\tan\beta = \frac{m}{q} = \tan \mathrm{E}$)

per OS=0 area $POQ = \frac{qm}{2}E$ **A]**

per OS<q area $PSQ = \frac{qm}{2}\left(E - \frac{OS}{q} sinE\right) = \frac{qm}{2}\boldsymbol{M}$ **B]**

per OS=q area $PQP = \frac{qm}{2}(E - sinE)$

APPEND.6 LUNGHEZZA DELL'ARCO D'ELLISSE RETTIFICAZIONE

(in letteratura con E=α) $\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{m^2 sen^2\alpha + q^2\cos^2\alpha}$ $\quad s = q\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\ d\alpha$

APPEND.7 IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO

$2R\pi = (q_x+m_x)\pi$ $\quad R\frac{\pi}{2} = \frac{(q+m)}{2}\frac{\pi}{2}$

ARCO $PQ = \left[\frac{Integrale\ ellittico}{2} + \frac{\pi}{2}\right]\alpha^R$ espresso nelle sue varie formulazioni.

Vedi applet: AP071 CAP.VII ARCO ELLISSE E CERCHIO.

****

Nella letteratura la formula che in astronomia è chiamata Anomalia Media è indicata rifacendosi a Keplero, ma non è mai indicata la sua collocazione e la sua origine. In realtà la II° Legge di Keplero è una proprietà dell'ellisse e di tutte le curve chiuse.

Posto nella formula sopra OS=distanza-focale da cui ε=eccentricità=OS/asse-maggiore=c/q (come in A] e B]), in Astronomia chiamiamo:
E = Anomalia Eccentrica (ma dovrebbe essere E = Anomalia Media**)**
M = Anomalia Media

Il valore M dato dalla funzione $f(E) = (E - \varepsilon \, sinE)$ non è che l'angolo E corretto dalla scelta di volta in volta della variabile ε, e quindi come E rappresenta un angolo di riferimento e come questi non compare geometricamente nella ellisse in esame.
Più in generale la formula indicata con **B]** mi permette di calcolare l'Area di un qualunque settore o settore di settore di Ellisse, ivi compreso quello di centro O, per OS=0: tale concetto si estende a qualunque curva chiusa.

In APPEND.1 TEOREMA DEI PIANETI, abbiamo calcolato le aree tracciate sull'elisse di eguale valore alle aree sulla circonferenza di riferimento; ora invece dalle formule **A]** e **B]** si ricava il rapporto tra le Aree dei settori POR=S e PSQ=A in funzione di E e quindi per un valore E_1 si avrà S_1 e A_1 da cui:

$$\frac{S}{E} = \frac{A}{M} = \frac{S_1}{E_1} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{q \cdot m}{2} = costante$$

è evidente che per $E=E_1$, sarà $S=S_1$ ma anche $M=M_1$ in quanto funzione di E, da cui $A=A_1$; allora se $E=E_1$ (circolari) sono percorsi in **tempi uguali**, in tempi uguali saranno percorse le aree $S=S_1$ e anche le aree $A=A_1$ e quindi sempre per f(E) anche $M=M_1$: tale proprietà giustifica la <u>**seconda legge di Keplero**</u>.
Ricordiamo che il legame tra E, angolo di riferimento e β angolo al centro dell'ellisse è $tan\beta = \frac{m}{q} tanE$ e che valori di E uguali non forniscono angoli β uguali, pertanto gli angoli β non adiacenti all'ascissa andranno calcolati per differenza.

(Vedi APPEND.3 AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE)

M. Vaglieco

VAI SOMMARIO

OSSERVAZIONI

La legge di Newton basata su *la legge di gravitazione universale* di Corpi che si attraggono in ogni direzione con eguale forza in base alla Massa e alla distanza (d), è espressa dalla formula

$$F = G\frac{m_1\,m_2}{d^2}$$

Essa mostra soltanto la distanza tra le masse ma non indica alcuna traiettoria.
Nel APPEND.1 IL TEORMA DEI PIANETI al punto *Facciamo un esempio pragmatico* si indica la distanza, tra masse che si attraggono, essere raggi di ellisse, mentre l'orbita rimane quella circolare, cioè di un corpo intorno al proprio Centro di Massa (C.M.); e se la velocità di un corpo rispetto al C.M. è costante, la sua velocità rispetto ad un altro punto-pianeta (come nel caso del Sole), variando la sua distanza, varia la velocità (per cui avremo l'Afelio e il Perielio), data dalla forza di gravitazione universale e interpretata dalla formula di Newton, e non dovuta ad una traiettoria ma semplicemente dalla sua distanza ellittica.

Non dovendo più considerare il punto-Sole posto nel fuoco della ellisse, posso affermare che la Luna con orbita Circolare (essendo un pianeta anch'essa) mantiene la sua proprietà di distanza ellittica sia rispetto alla Terra che al Sole o a qualunque altro pianeta. Possiamo anzi affermare che tutti i pianeti si muovono, con moto CICLOIDE[4] secondo la sua nuova definizione geometrica.

I corpi si spostano dalla loro orbita (Circolare) solo per effetto di una nuova Forza (esplosiva?) e assumono una traiettoria (Parabolica, Iperbolica, Ellittica, ecc.) che in realtà è un Moto Circolare come è dimostrato nel CAP.XIV[5], a conferma del concetto relativistico di Einstein.

Da dove scaturisce la forza centripeta che genera il moto Circolare e quindi il suo centro di massa (CM)?
Essa è la forza di gravitazione universale, intuita da Newton, la stessa che fino ad oggi abbiamo supposto erroneamente determinare una traiettoria ellittica.
Il CM di ogni pianeta è dunque il punto somma delle forze attrattive, cioè di tutte le Forze che formano la Gravitazione Universale, stabilendo un loro CM di distanza costante nel sistema e quindi una Orbita Circolare.

Se dunque i Pianeti hanno orbite circolari si ha una accelerazione centripeta:

$$F = G\frac{mM}{d^2} = m\frac{V^2}{d} \quad il\ che\ significa\ V = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

[4] *(vedi SOMMARIO CAP.XIII CICLOIDI)*
[5] *(vedi SOMMARIO CAP.XIV CICLOIDI DI VAG)*

e per il "TEOREMA DEI PIANETI" e per "APPEND.7 IL VALORE GEOMETRICO DELL' INTEGRALE ELLITTICO" abbiamo **d=R=(a+b)/2** dove R rappresenta il raggio della traiettoria circolare del Pianeta (m) e d=(a+b)/2 il valore della distanza ellittica tra Sole (M) e Pianeta(m), (come vedremo più avanti) data dall'espressione:

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{(a+b)}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{P_{erimetro\ Ellisse}}{T} = \frac{P_{erimetro\ Circonferenza}}{T}; \qquad \text{C)}$$

Nel sistema solare l'unico a non essere satellite di un altro è il Sole: Sole-Terra, Sole-Marte ecc.; gli altri Pianeti possono avere Satelliti propri: Terra (Pianeta)-Luna (satellite), Marte - Fobos e Deimos, Giove- Amaltea e Io; al limite possono esistere satelliti di satellite di Pianeta; senza che la legge della gravitazione ne risulti alterata. L'espressione **C)** vale per ogni Pianeta e Satellite (Sole-Terra, Terra-Luna, Luna-X).

Noi possiamo calcolare l'interazione tra due Masse, secondo quanto indica Newton, ma in realtà compariamo la differenza della *forza gravitazionale* esercitata su ciascuna di esse e il Teorema dei Pianeti ci indica che le distanze tra masse in orbita (circolare) sono distanze ellittiche (non traiettorie), quindi variabili in distanza e velocità, come nel caso Terra Sole, Venere Sole, ecc. ed è dalla espressione di C) che abbiamo:
(vedi i dati indicati nel riquadro "Esempio" nel CAP.V a seguire)

l'Afelio $V_{Terra} = \sqrt{\frac{GM_{Sole}}{Afelio}} = 29{,}5335^5$; $V_{Venere} = 34{,}8872^5$; $V_{Marte} = 23{,}0777^5$

il Perielio $V_{Terra} = \sqrt{\frac{GM_{Sole}}{Perielio}} = 30{,}03128^5$; $V_{Venere} = 35{,}1461^5$; $V_{Marte} = 25{,}3346^5$

Velocità (Af+Pe)/2 $=29{,}78239^5$; $=35{,}01665^5$; $=24{,}20615^5$

Dunque tutti i Pianeti hanno un loro CM e orbita circolare e la loro distanza dal proprio CM è una costante determinata dalla gravità universale, costante in ogni direzione; ed essi interagiscono tra loro secondo Newton, mediante distanze ellittiche, giusto il valore (d) della formula indicata. L'interazione che interviene tra l'una e l'altra massa può variare in funzione della loro distanza ellittica ma non è tale da modificarne l'orbita, può tuttavia perturbarla.

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CAP.V LEGGE DEL MOTO DEI PIANETI

Si osservi che il "Teorema dei Pianeti" coincide con il Moto di Rivoluzione dei Pianeti allorquando il centro di riferimento coincide col Centro di Massa del moto di un Pianeta, mentre l'altro Pianeta è fermo e se quest'ultimo è il Sole, la massima distanza (Afelio) e la minima (Perielio)sono in linea.

Il caso in esame è una semplificazione che considera il Moto di Rivoluzione delle due masse complanari. In realtà il "Teorema dei Pianeti" ci dice che le distanze ellittiche avvengono allo stesso modo allorquando il Punto-Massa considerato fermo è fuori dal piano dell'orbita circolare dell'altro: caso Luna (orbita circolare) e le sue distanze ellittiche (cicloidi) dal Sole (punto fermo).

Applicando alle formule, ottenute dal Teorema dei Pianeti, i dati relativi al moto dei Pianeti, abbiamo che A_f= Afelio e P_e= Perielio sulla circonferenza, come vediamo dalla figura del "CAP.II IL TEOREMA DEI PIANETI" e dal "CAP.III MOTO DI RIVOLUZIONE":

$$R = \frac{A_f + P_e}{2} \; e \; r = \frac{A_f - P_e}{2} \qquad \text{cioe'} \begin{cases} A_f = (R+r) = a = semi - asse\ mag \\ \mathrm{P_e} = (R-r) = b = semi - asse\ \min \end{cases} \qquad [7]$$

dove a e b sono semiassi della distanza ellittica del Sole.

Possiamo allora riformulare le Leggi di Keplero:

Iª LEGGE DEL MOTO DEI PIANETI (Prima legge di Keplero):
«I Pianeti ruotano secondo proprie Orbite Circolari e tutti, uno rispetto all'altro, con distanze ellittiche.»

IIª LA SECONDA LEGGE DI KEPLERO, come indicato al precedente CAP.IV (in APPENDICE: ESEMPIO4: ARCO DI ELLISSE), dimostra che il raggio vettore ellittico spazza Aree ellittiche uguali in Tempi uguali[6].

IIIª LA TERZA LEGGE DI KEPLERO. Partendo dalla velocità Orbitale Media $\frac{2\pi R}{T} = V \; per \; V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ e uguagliando le due formule otteniamo $\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{2^2\pi^2}$ con T=periodo orbitale, R raggio dell'orbita e M=massa Sole, sintetizzata in Letteratura dalla formula:

$$\frac{a^3}{T^2} = K = costante \quad \text{con} \quad K = \frac{GM}{2^2\pi^2} \qquad 1]$$

---

[6] *Geometria Parametrica - Cap.VII "Area e Perimetro Ellisse" Pag.9-10*

dove si ipotizza $R \propto a$=semi-asse maggiore di una ellisse.
Il valore (a) è presentato come raggio di circonferenza e da tale condizione Newton mosse per la sua dimostrazione analitica alla condizione di essere in presenza di una orbita circolare, di una velocità orbitale costante e di un moto circolare uniforme.
Riscriviamola, per M=massa e G=Cost.di gravitazione universale:

$$\frac{2\pi a}{T} = V \quad \text{e} \quad V = \sqrt{\frac{GM}{a}} \qquad 2]$$

ma volendoci rifare non ad una circonferenza ma ad una ellisse dovrò scrivere la prima equazione di 2]:

$$\frac{P_{erimetro\ Ellisse}}{T} = V$$

E poichè il valore del perimetro dell'ellisse è uguale al perimetro della corrispondente circonferenza di raggio:

$$2R\pi = (a+b)\pi$$

(Vedi APPEND.7 "IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO")
posso riscrivere la 1]:

$$\frac{(a+b)^3}{2^3T^2} = \frac{GM}{2^2\,\pi^2} \implies \frac{(a+b)^3}{T^2} = \frac{2GM}{\pi^2} \qquad 3]$$

e la Velocita 2] sarà per **R=(a+b)/2 e G=6,670^{-8} cm^3/(gr sec^2)**

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{2GM}{(a+b)}} = \frac{(a+b)\pi}{T} = \frac{P_{erimetro\ Ellisse}}{T} = \frac{2R\pi}{T} = \frac{P_{erimetro\ Circonferenza}}{T}; \qquad 4]$$

Esempio:
posto M_{Sole}=M=Massa Sole = 1989^{30}, e assi dei Pianeti:

Afelio +	$a_{Terra}=152,1^{11}$	$a_{Venere}=109^{11}$	$a_{Marte}=249,1^{11}$
Perielio +	$b_{Terra}=147,1^{11}$	$b_{Venere}=107,4^{11}$	$b_{Marte}=206,7^{11}$
Totale =	$299,2^{11}$	$216,40^{11}$	$455,8^{11}$

vediamo le velocità per $2GM_{Sole}=2x6,670^{-8}1989^{30}=2,653326^{26}$:

$$* \quad V_{Terra} = \sqrt{\frac{2\times 6,670^{-8}1989^{30}}{(299,2^{11})}} = \frac{299,2^{11}\,\pi}{365,24gg\times 86400} = \frac{(a+b)\pi}{T} = \frac{2R\pi}{T} = 29,78649^5 cm/sec$$

$$**V_{Venere} = \sqrt{\frac{2\times 6,670^{-8}1989^{30}}{(216,40^{11})}} = \frac{216,40^{11}\,\pi}{224,7gg\times 86400} = \frac{(a+b)\pi}{T} = \frac{2R\pi}{T} = 35,017^5 cm/sec$$

$$***V_{Marte} = \sqrt{\frac{2\times 6,670^{-8}1989^{30}}{(455,8^{11})}} = \frac{455,8^{11}\,\pi}{687gg\times 86400} = \frac{(a+b)\pi}{T} = \frac{2R\pi}{T} = 24,127^5 cm/sec$$

Dalla 4]:

$$V^2 = \frac{2GM}{(a+b)} = \frac{(a+b)^2\pi^2}{T^2}\ ;\ \frac{2GM}{\pi^2} = \frac{(a+b)^3}{T^2} = \frac{2^3R^3}{T^2} = K$$

riferite questa volta ad una circonferenza di eguale perimetro della ellisse, percorsa alla stessa velocità.

Tale velocità è la **velocità orbitale media**.

Come circonferenza è data dalla velocità angolare con moto circolare uniforme, e *quindi la formulazione di Newton a cui ci si riferisce è esatta, perché siamo effettivamente in presenza di una circonferenza di eguale perimetro di una ellisse.*

Come ellisse la velocità media è uguale ma come indica l'ESEMPIO nel capitolo relativo al calcolo del perimetro della ellisse[7], sono uguali solo gli archi dei rispettivi quarti (=π/2), e differenti gli archi riferiti agli angoli dei valori intermedi (<π/2) e **dunque la sua velocità non è costante.**

La 1] per $\frac{(a+b)^3}{T^2} = K = costante$ è dunque la **formula esatta** da applicare per la terza legge di Keplero essendo (vedi avanti) giusta $2R\pi = (a+b)\pi$ per calcolare il perimetro di una Ellisse.

Dai dati del quadrante Esempio (pagina precedente) possiamo trovare la massa del Sole da:

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{(a+b)}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \frac{P_{erimetro\ Ellisse}}{T} = \frac{P_{erimetro\ Circonferenza}}{T};$$

o da Keplero, ricavandola dalla Terra Venere Marte:

$$\mathrm{M_{Sole}} = \frac{(\mathrm{a+b})^3\pi^2}{2\mathrm{GT}^2_{\mathrm{Terra}}} = \frac{(\mathrm{a+b})^3_{\mathrm{Terra}}\pi^2}{2\mathrm{G}(365{,}24\times 86400)^2} = \frac{2{,}643531641^{41}}{132843400{,}1} = 1989^{30}$$

$$\mathrm{M_{Sole}} = \frac{(\mathrm{a+b})^3\pi^2}{2\mathrm{GT}^2_{\mathrm{Venere}}} = \frac{(\mathrm{a+b})^3_{\mathrm{Venere}}\pi^2}{2\mathrm{G}(224{,}7\times 86400)^2} = \frac{1{,}000164682^{41}}{50279327{,}39} = 1989^{30}$$

$$\mathrm{M_{Sole}} = \frac{(\mathrm{a+b})^3\pi^2}{2\mathrm{GT}^2_{\mathrm{Marte}}} = \frac{(\mathrm{a+b})^3_{\mathrm{Marte}}\pi^2}{2\mathrm{G}(687\times 86400)^2} = \frac{9{,}34593396^{41}}{469998842{,}8} = 1988^{30}$$

Dall'esempio nel riquadro, possiamo calcolare il periodo dell'orbita dei Pianeti:

$$T_{Terra} = \sqrt{\frac{(a+b)^3\pi^2}{2GM_{Sole}}} = \sqrt{\frac{(299{,}2^{11})^3\ \pi^2}{2{,}653324^{26}}} = \frac{(31564365{,}14)}{86400} = 365{,}3283002\ gg;\quad **)$$

e più precisamente:

$$\left[\mathrm{T_{Terra}} = \frac{(\mathrm{a+b})\pi}{\mathrm{V}} = \frac{(299{,}2^{11})\pi}{\mathbf{2978649{,}382}} = (31556736{,}00/86400) = \mathbf{365{,}24\ gg}\right]$$

$$\mathrm{T_{Venere}} = \frac{(\mathrm{a+b})\pi}{\mathrm{V}} = \frac{(216{,}40^{11})\pi}{35{,}0175} = (19414588{,}63/86400) = 224{,}7058869\ \mathrm{gg}$$

$$\mathrm{T_{Marte}} = \frac{(\mathrm{a+b})\pi}{\mathrm{V}} = \frac{(455{,}8^{11})\pi}{24{,}127^5} = \left(\frac{59350019{,}95}{86400\mathrm{x}365\mathrm{gg}}\right) = \left(\frac{59350019{,}95}{315{,}36^5\ \mathrm{gg}}\right) = 1{,}88\ \mathrm{aa}$$

M.Vaglieco VAI SOMMARIO

[7] Geometria Parametrica - Cap.VII "Area e Perimetro Ellisse" Pag.12-13
oppure in APPENDICE: ESEMPIO 4: ARCO DI ELLISSE

CAP.VI DISTANZA TRA PIANETI: CASO LUNA-TERRA

Tenendo presente il già accennato APPEND.7 "IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO" possiamo analizzare la distanza del satellite Luna.
DISTANZA LUNA-TERRA[8]:
Apogeo=a max. $4,055^{10}$ cm Perigeo=b min. $3,633^{10}$ cm
Distanza: 2R=(a+b)= $7,688^{10}$; **d=R=(a+b)/2=$3,844^{10}$** (Media)
Perimetro dell'orbita $(7,688^{10}\,\pi) = 2,415256432^{11}$.

Velocità media=Perimetro/<u>mese relativo</u> in giorni (gg per 86.400), mediante il perimetro indicato, calcoliamo **<u>secondo letteratura</u>**:

1. Velocita Siderale, rotazione della Luna sul proprio asse uguale al moto di rivoluzione attorno alla Terra e suo riallineamento:
$$V = \frac{2,415256432^{11}}{(27,32166gg \times 86400)} = 1,02315^5 cm/sec$$
2. Velocita Sinodica, moto di traslazione della Luna, per rioccupare nei riguardi del Sole e della Terra (rispetto a una stella fissa) la stessa posizione in linea:
$$V = \frac{2,415256432^{11}}{(29,53059gg \times 86400)} = 0,94662^5 cm/sec$$
3. Velocità Draconitica, ritorno allo stesso nodo ascendente:
$$V = \frac{2,415256432^{11}}{(27,21222gg \times 86400)} = 1,02727^5 cm/sec$$
4. Velocità Anomalistica due successivi passaggi al perigeo:
$$V = \frac{2,415256432^{11}}{(27,55455gg \times 86400)} = 1,014509^5 cm/sec$$

****

VELOCITA' media LUNA-TERRA[9] da **C)** del Cap. OSSERVAZIONI:

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{d}}$$ M_T=Massa Terra=$5,976^{27}$ gr; G=costante di Grav. Universale=$6,670^{-8}$

$$V_{MEDIA} = \sqrt{\frac{2\,G\,5,976^{27}}{(a+b)}} = \sqrt{\frac{7,971984^{20}}{7,6880^{10}}} = \sqrt{1,036938605^{10}} = 1,01830^5 cm/sec \quad \text{*)}$$

$$V_{Apogeo} = \sqrt{\frac{G\,5,976^{27}}{a}} = \sqrt{\frac{3,985992^{20}}{4,055^{10}}} = \sqrt{9829819975,0} = 0,99145^5\ cm/sec$$

$$V_{Perigeo} = \sqrt{\frac{G\,5,976^{27}}{b}} = \sqrt{\frac{3,985992^{20}}{0,36330^{11}}} = \sqrt{1,0971626^{10}} = 1,04745^5\ cm/sec$$

$$V_{Apogeo} + V_{Perigeo} = 0,99145^5 + 1,04745^5 = 203890,00 : 2 = 1,01945^5\ cm/sec$$

Dalla velocità V_{MEDIA} tramite il Perimetro dell'orbita è possibile ricavare il tempo di percorrenza:

---

[8] *Da "IL MOTO DEI CORPI CELESTI" di Antonio Leone (franco muzzio & c. editore)*

$$T_{Luna} = \frac{Perimetro}{V_{1,01830^5} \times 86400} = \frac{7{,}688^{10}\ \pi}{8798112000} = 27{,}45198551gg$$

e anche dalla terza legge di Keplero:

$$T_{Luna} = \sqrt{\frac{(a+b)^3 \times \pi^2}{2GM_T}} = \sqrt{\frac{4{,}48476684^{33}}{7{,}971984^{20}}} = \sqrt{5{,}62565961^{12}} = \ 2371847{,}299 : 86400 =$$
$$= 27{,}45193633gg$$

Con il tempo di percorrenza, mediante il Perimetro ricalcoliamo la velocita sempre con **C)**

$$V_{Media} = \frac{Perim.Ell}{T} = \frac{2.415256436^{11}}{(27{,}45198551gg \times 86400)} = 1{,}01830^5$$

(velocità media vista sopra)in ***)**

Questo tempo non coincide con quello siderale **27,32166** della letteratura, mentre dovrebbe, perché si tratta di una rivoluzione completa.

M.Vaglieco VAI SOMMARIO

CAP.VII DISTANZA E MOTO LUNA SOLE.

Per il "TEOREMA DEI PIANETI", il moto circolare della Luna ha distanze ellittiche anche con il Sole. La letteratura ci indica che quando Terra-Luna-Sole sono in congiunzione, avremo le distanze massima e minima.

Distanza **media** **Terra-Sole**=$(152,1^{11}+147.1^{11})/2 = 149,6^{11}$ (Raggio)
" " **Terra-Luna**=384400 km =$0,3844^{11}$ cm (Raggio)
Perimetro dell'Orbita (in CAP.VI) **Luna** $2R\pi = 2\cdot 0,3844^{11}\pi = 2,415256432^{11}$

Distanza media **max Luna-Sole**= $149,6^{11}$ **+** $0,3844^{11}$= $\mathbf{149,9844^{11}} = A_f$
" **min** " " **-** " = $\mathbf{149,2156^{11}} = P_e$

Distanze: $(A_f+P_e)=\mathbf{299,2^{11}} =2R$; $R=(A_f+P_e)/2=\mathbf{149,6^{11}}$;
Perimetro (ellisse) Sole-Luna $2R\pi = 299,2^{11}\pi = 9,399645219^{13}$ *)
M_S=Massa Sole = 1989^{30}

Velocità media LUNA-SOLE:

$$V_{Luna-Sole} = \sqrt{\frac{G\ 1989^{30}}{R}} = \sqrt{\frac{1,326663^{26}=}{149,6^{11}}} = \sqrt{8,868068181^{12}} = 29,77930^5$$

Mentre la velocità media (Luna-Sole) è come quella di (Terra-Sole), le velocità al Perigeo e Afelio di Luna-Sole e Terra-Sole sono diverse:

$$V_{Af\ Luna} = \sqrt{\frac{G\ 1989^{30}}{A_f}} = \sqrt{\frac{1,326663^{26}}{149,9844^{11}}} = \sqrt{8,845339915^{12}} = 29,7411^5$$

($V_{AfTerra} = 29,9533^5$ dal Cap. OSSERVAZIONI)

$$V_{Pe\ Luna} = \sqrt{\frac{G\ 1989^{30}}{P_e}} = \sqrt{\frac{1,326663^{26}}{149,2156^{11}}} = \sqrt{8,89091355^{12}} = 29,8176^5$$

($V_{PeTerra} = 30,03128^5$ dal Cap. OSSERVAZIONI)

$\frac{\mathbf{V_{Af\ Luna}+V_{Pe\ Luna}}}{\mathbf{2}} = 29,77930^5$ cm velocità Luna-Sole.

La velocità della Terra rispetto al Sole è di $29,78^5$ prossima a quella della Luna rispetto al Sole, in quanto Terra e Luna viaggiano assieme rispetto al Sole.
Infatti il tempo di percorrenza è praticamente uguale.

Ora vediamo il periodo di percorrenza dalla velocità tramite il perimetro Luna-Sole, da ***)**:

$$T_{Luna-Sole} = \frac{Perimetro}{V_{29,77930^5} \times 86400} = \frac{9,399645219^{13}}{2,57293152^{11}} = 365,3282314gg$$

o tramite la III legge di Keplero:

$$T_{Luna-Sole} = \sqrt{\frac{(a+b)^3 \times \pi^2}{2GM_{Sole}}} = \sqrt{\frac{(299{,}2^{11})^3\ \pi^2}{2{,}653326^{26}}} = \sqrt{\frac{2{,}643531641^{41}}{2{,}653326^{26}}} = \sqrt{9{,}963086484^{14}}$$
$$= 31564357{,}24 : 86400 = 365{,}3281527gg$$

in entrambi i casi coincidono.

Il periodo della Luna qui indicato (365,3281527) è praticamente uguale al valore di percorrenza di (365,3283002gg) ottenuto per la Terra e indicato nel CAP.V al punto **; il che è giusto se pensiamo che Terra e Luna ruotano entrambi di 360° rispetto al Sole, cioè rispetto ad un punto considerato fisso che è il Sole; ma è da tenere presente che il valore gg di entrambi si riferiscono a due orbite differenti per grandezza e velocità, ma non differenti per numero di giorni, perché questi sono riferiti per uguali gradi a uno steso punto fisso, il Sole. I giorni della Terra e della Luna sono uguali per numero ma non per grandezza! Infatti sia la Terra che la Luna, nella loro traiettoria circolare ruotano entrambi di 360°; e poiché la loro velocita media è presso che uguale avremo uguale numero di albe e di tramonti, cioè uguali numero di giorni, ma non giorni di uguale grandezza.

M.Vaglieco VAI SOMMARIO

CAP.VIII MOTO SATELLITARE

Nel CAP.V “LEGGI DEL MOTO DEI PIANETI” abbiamo dimostrato che le orbite dei pianeti sono circolari, mentre le distanze dei punti di queste circonferenze, da un qualunque punto, sono vettori ellittici. Abbiamo anche affermato che questo vale per tutti i pianeti, Sole compreso, e quindi varrà anche per i satelliti messi in orbita.
Sappiamo che i satelliti **stazionari** hanno distanza costante dal Centro di Massa del relativo pianeta, e si muovono con velocità uguale alla velocità di rotazione del Pianeta e pertanto la loro distanza da un Punto-Massa del pianeta è costante, e vale un raggio di circonferenza, non c’è distanza ellittica.
Invece i satelliti in orbita hanno distanze costanti dal Centro di Massa del relativo Pianeta, ma per la Legge del Moto indicata, la distanza del Satellite da un Punto fisso del Pianeta, dovrà essere un raggio vettore d’ellisse, perchè il satellite e il punto preso in considerazione, hanno velocità diverse: si troveranno dunque una volta vicino e una volta lontano proprio secondo raggi vettori ellittici.
In conclusione la legge del moto circolare indica i valori ellittici di un punto che ruota su un orbita circolare rispetto a un punto proprio del pianeta, che ruota su se stessa.
Il capitolo a seguire sulla traiettoria di un satellite, vuole proprio indicare l’ellisse data dal moto circolare del Satellite, con centro nel CM (Centro Massa) del relativo Pianeta, rispetto ad un punto fisso di questi.
Il moto circolare dei corpi nello spazio, indicato dalla relatività-Generale (RG) di un corpo che attira gli altri corpi con un moto circolare è indicato proprio dalla Geometria Parametrica, come vedremo più avanti, come particolare moto di cicloide (Cicloide di Vag o delle funzioni continue).
E’ pertanto opportuno definire la parabola in modo geometrico e come luogo di punti, nel Capitolo che segue.

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CAP.IX RIDEFINIZIONE DELLA PARABOLA

Nella Geometria Parametrica in un riferimento cartesiano (ortogonale), il luogo geometrico dei punti che distano dall'origine la somma algebrica di una costante p($p \in R^+$) ed una coordinata di tali punti, cioè:

(p±y) (aperta verso +l'alto, -in basso; y asse di simmetria)

(p±x) (aperta verso +destra, -sinistra; x asse di simmetria)

dà luogo ad una curva chiamata Parabola e l'Origine è detto Fuoco, e il campo di variabilità di tali coordinate è:

$$\left(-\frac{p}{2};+\infty\right) \qquad \textit{oppure} \qquad \left(+\frac{p}{2};-\infty\right)$$

Dove p=Parametro della Parabola e p/2=distanza del Vertice della Parabola dal Fuoco (Origine).

Valori Parametrici:

a) $\begin{cases}(p\pm x)\cos\beta = x\\(p\pm x)\sin\beta = y\end{cases}$ $\qquad (p\pm x)^2 = x^2+y^2$

b) $\begin{cases}(p\pm y)\cos\beta = x\\(p\pm y)\sin\beta = y\end{cases}$ $\qquad (p\pm y)^2 = x^2+y^2$

da cui l'Equazione per punti della **Parabola con il Fuoco nell' Origine:**

$y^2 = p^2 \pm 2px$ (concavità verso l'asse delle x)

$x^2 = p^2 \pm 2py$ (concavità verso l'asse delle y)

Sviluppando:

$$(p\pm x)\cos\beta = x \Rightarrow [x] = \left[\frac{p}{1\mp\cos\beta}\cos\beta\right]; \quad [x]\sin\beta = y\cos\beta \quad y = \left[\frac{p}{1\mp\cos\beta}\right]\sin\beta$$

possiamo scrivere:

Eq. Polare e Parametrica con Fuoco nell' Origine:

$$OA = \frac{p}{1\mp\cos\beta} \qquad \begin{cases}OA\cos\beta = \dfrac{p}{1\mp\cos\beta}\cos\beta = x\\[2ex] OA\sin\beta = \dfrac{p}{1\mp\cos\beta}\sin\beta = y\end{cases}$$

Eq. Parametrica con il Vertice nell' Origine:

$$\begin{cases}OA\cos\beta = x = \dfrac{2p}{\tan^2\beta}\\[2ex] OA\sin\beta = y = \dfrac{2p}{\tan\beta}\end{cases} \qquad y = x\tan\beta;\ \ y\tan\beta = x\tan^2\beta = 2p$$

dalla prima espressione abbiamo l'equazione per punti:

$$OA = \frac{2p\ \cos(\beta)}{SIN^2(\beta)}; \qquad OA = \frac{\frac{2px}{OA}}{\frac{y^2}{OA^2}} = \frac{2px\ OA}{y^2} \quad \Rightarrow y^2 = 2px$$

Parametrica in COSENO:

Punto: $\left(\frac{R}{\cos^2(\alpha)}\cos(2\alpha), \frac{R}{\cos^2(\alpha)}\sin(2\alpha)\right)$ (R=parametro)

Curva: $(R(1-tan^2(\alpha)), 2R\ \tan(\alpha), \alpha, 0, 2\pi)$

Da Conica a Parametrica di angolo (β)

da Conica $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = x(ax+b)+c = y_1 + c$

a Parametrica con $\frac{y_1}{x} = \tan(\beta) = ax + b;\quad x = \frac{\tan(\beta) - b}{a}$

$y_1 = \frac{[(\tan(\beta)-b)^2 + (\tan(\beta)-b)]}{a} = \frac{\tan(\beta)-b}{a}\tan(\beta)$ tenendo presente di fare

$prima\ \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e poi $\beta \in (\pi/2, \pi)$;

Curva Parametrica; $[(tan(\beta) - b) / a, ((tan(\beta) - b) / a)\, tan(\beta) + c, \beta, 0, \pi]$

Parabola Parametrica (fuoco nell'Origine):

Aperta a sinistra

è Eq. Di Vag di una parabola di parametro **p=2R**.

a] $\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha}(\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)})\,\mathrm{sen}\beta$

ma moltiplicando i membri dell'Eq. di Vag per cosα :

b] $R = R(1-2\cos\alpha)\cos\beta + R(\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)})\,sen\beta$

è Eq. di Vag di una circonferenza di raggio R.

Aperta a destra

$\frac{R}{\cos\alpha} = -\frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha}(\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)})\,sen\beta$

Aperta in alto

$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right]\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\beta$

Aperta in basso.

$\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right]\cos\beta + \frac{R}{\cos\alpha} - (1-2\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\beta$

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CAP.X EQUAZIONE DELLA PARABOLA PARAMETRICA

Da ciò che abbiamo visto nel precedente Titolo "RIDEFINIZIONE DELLA PARABOLA", scriviamo l'Eq. della Parabola di Vag

a]
$$\begin{cases} \frac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = \pm(\frac{R}{\cos\alpha} - 2R) = \pm\frac{R}{\cos\alpha}(1-2\cos\alpha) \\ \frac{R}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta = y = \frac{R}{\cos\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

che può anche essere scritta (intendendo α=90-α cioè cos(90-α)= senα):

b]
$$\begin{cases} \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\beta = x = \pm(\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} - 2R) = \pm\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}(1-2\operatorname{sen}\alpha) \\ \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\beta = y = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}\left[\pm 2\sqrt{\operatorname{sen}\alpha(1-\operatorname{sen}\alpha)}\right] \end{cases}$$

Entrambe hanno lo stesso significato con la sola differenza che a] parte dal vertice della parabola verso l'infinito mentre la b] viene dall'infinito verso il vertice.
Si osservi la seguente variazione:

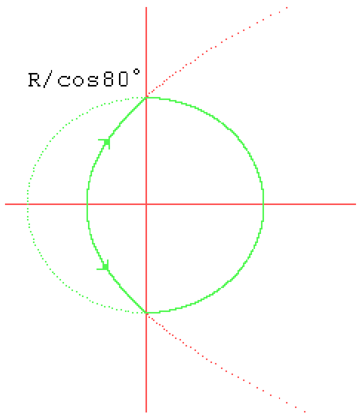
$$\begin{cases} x = \pm\frac{R}{\cos\alpha_1}(1-2\cos\alpha) \\ y = \frac{R}{\cos\alpha_1}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

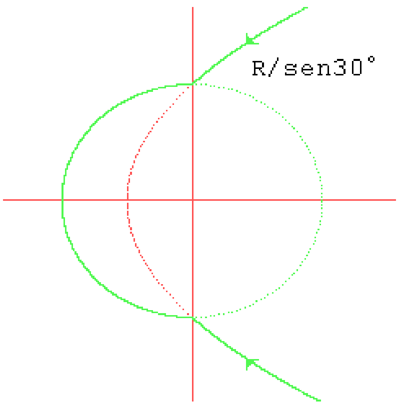
dove ponendo $\alpha_1=\alpha$ non ci sarà nessuna diversità con le Eq. Di Vag viste sopra. Se però poniamo un limite ad α_1:

$$\begin{cases} \alpha = 0°...............\alpha'...................90° \\ \alpha_1 = 0°...............\alpha'...\alpha'..\alpha'...\alpha'...\alpha' \end{cases}$$

cioè $\alpha_1=\alpha$ fino al valore α' dopo di che $\alpha_1=\alpha'$=costante si avrà che

AP100 CAP.X EQ PARAB PARAMETRICA



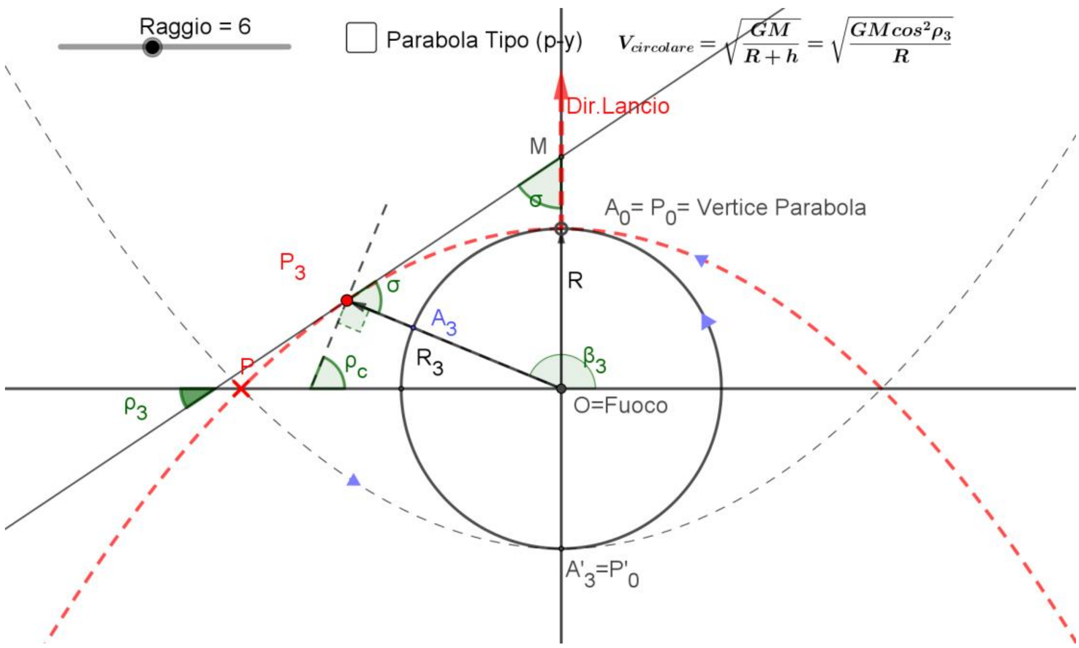


nella equazione $\frac{R}{\cos\alpha'} = R'$; significa che la equazione sarà una parabola fino al valore $\alpha_1=\alpha'$ dopo di che diventerà una circonferenza di raggio R'

M.Vaglieco VAI SOMMARIO

CAP.XI TRAIETTORIA PARABOLICA DI UN SATELLITE

Il razzo (satellite) che viene sparato verticalmente con moto di direzione e verso secondo il raggio di una circonferenza, traccia una parabola del tipo $(p-y)^2 = x^2 + y^2$ (secondo la definizione geometrica con riferimento nel fuoco) dove il parametro della parabola vale due volte il raggio della circonferenza p=2R, di centro nel Fuoco, ed R rappresenta la distanza focale; come dalla figura indicata:
la parabola è in rosso, mentre la partenza è su un punto A_0 della circonferenza, che ruota in senso antiorario, con velocità propria del Pianeta che vuole rappresentare; il razzo (satellite) è sottoposto a due moti quello lungo il raggio e quello circolare del Pianeta nel suo verso.



VEDI Applet: AP109 CAP.XI TRAIETTORIA PARABOLA.
Indichiamo i dati salienti della Parabola:

1. I raggi $R=OP_0$ e $R_3=OP_3$; $P_3A_3=A_0M$ e $OP_3=OM=R_3$
2. $\tan\rho_3$ è la tangente in P_3 alla parabola; $\tan\rho_C$ alla circonferenza di raggio R_3
3. Relazione tra gli angoli:

$(\rho_3 + \sigma) = 90$; $\sigma = (90 - \rho_3)$; $\rho_3 = (90 - \sigma)$;
$(90 - \rho_c) = (180 - \beta_3)$; $(\beta_3 - 90) = \rho_c$
$(\beta_3 - 90) = 180 - 2\sigma = 2(90 - \sigma) = 2\rho_3 = \rho_c$

4. Valore dell'ordinata e ascissa:

$y_3 = R_3\, sin\beta_3 = R_3\, sin((90 + 2\rho_3) = R_3\, cos2\rho_3 = R_3\, cos\rho_C$
$x_3 = R_3\, cos\beta_3 = R_3\, cos((90 + 2\rho_3) = -R_3 \sin(2\rho_3) = -R_3\, sin\rho_C$

5. Per definizione:

$(p - y_3) = R_3$; $\quad p = 2R = (y_3 + R_3) = R_3\, sin\beta_3 + R_3 = 2R_3\, cos^2\rho_3$;
e anche $\quad R = R_3\, cos^2\rho_3$; $\quad \frac{R}{cos^2\rho_3} = R_3$;

6. Altezza A_3P_3=$h = R_3 - R$ $e\ per$ 5. $\quad h = \frac{R}{cos^2\rho_3} - R = R\, tan^2\rho_3$

7. $\frac{dy}{dx} = tan\rho_3 = -\frac{x}{p}$ (segno negativo perché il verso è antiorario),
$[x_3 = -p\ tan\rho_3 = -(2R_3\ cos^2\rho_3)tan\rho_3 = \ -R_3\ sin2\rho_3 = R_3cos\beta_3]$

- dalla 4. e 7.le circonferenze: $\begin{cases} -R_3sin2\rho_3 = -R_3sin\rho_c = R_3cos\beta_3 = x_3 \\ R_3cos2\rho_3 = R_3cos\rho_c = R_3sin\beta_3 = y_3 \end{cases}$
  ($tan\rho_c$= tangente in P_3 della circonferenza di raggio R_3)
- dalla 6. $R = R_3cos^2\rho_3$ + la 5. $h = R_3 - R = R_3 - R_3cos^2\rho_3 = R_3sin^2\rho_3$
- è il sistema $\begin{cases} R_3sin^2\rho_3 = h \\ R_3cos^2\rho_3 = R \end{cases}$ dividendo avremo $h = Rtan^2\rho_3$ (come 6.)

LA VELOCITA'.

Posto $V_3^2 = \frac{GM}{R_3}$ $e\ (R+h) = R_3 = \frac{V_3^2}{g_3}$ ($\frac{GM}{R_3^2} = g_3$ e $\frac{V_3^2}{R_3} = g_3$ gravità superficiale del relativo Pianeta, rappresentato in figura dalla circonferenza (non tracciata) di raggio R_3 per il punto P_3) vediamo le formule già note, in letteratura:

- **Altezza di A_3P_3 da 6.:** $\boldsymbol{h = Rtan^2\rho_3 = R_3sin^2\rho_3 = \frac{V_3^2\ sin^2\rho_3}{g_3}}$
- **Altezza su ordinata da 4. :**

$$\boldsymbol{y_3 = R_3\ cos2\rho_3 = R_3\ sin\beta_3 = \frac{V_3^2cos2\rho_3}{g_3} = \frac{V_3^2\ sin\beta_3}{g_3}}$$

- **Gittata su ascissa da 7. :**

$$\boldsymbol{x_3 = -R_3sin2\rho_3 = R_3\ cos\beta_3 = -\frac{V_3^2sin2\rho_3}{g_3} = \frac{V_3^2\ cos\beta_3}{g_3}}$$

Velocità Circolare. La formula che dà la distanza R_x =R+h è:

$$V_C = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM}{R}\frac{1}{1+tan^2\rho_3}} = \sqrt{\frac{GM}{R/_{cos^2\rho_3}}} = \sqrt{\frac{GM\ cos^2\rho_3}{R}} = \sqrt{Rgcos^2\rho_3}\ \ \textbf{(**)}$$

e calcolata con la Massa della Terra =5,976[27]cm/sec, il suo Raggio=6378,099; e con G=6,670[-8] e gravità superficiale g=0,00981, fornisce il valore indicato da **(**)**:

- per ρ_3=0 è h=0 (velocità livello zero) e $\cos^2 0° = 1$:

$$V_C = \sqrt{\frac{GM\cos 0^0}{R}} = V_{cTerra=}\sqrt{\frac{6,670^{-8}\ 5,976^{27}_{gr}}{6378,099}}790.537,69\ cm/sc = 7,90537\ Km/sc$$
$$= \sqrt{Rg\cos 0^0} = \sqrt{6378,099\cdot 0,00981} = 7,9100$$

- per ρ_3= 45° è h=R e allora la velocità del punto P=(h+R)=2R (in rosso) nella Parabola in figura, per $cos^2 45°$=0.5, è:

$$V_p = \sqrt{\frac{GM}{2R}} = \sqrt{\frac{GM\ cos^2 45°}{R}} = \sqrt{Rgcos^2 45°}$$ rispettivamente:

$$V_{pTerra} = \sqrt{\frac{GM\ cos^2 45°}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}670^{-8}\ 5{,}976^{27}_{gr}\ 0.5}{6378{,}099^5}} = 5{,}58994{,}565\ cm/sc = \ 5.58994\ Km/sce$$
$$= \sqrt{Rgcos^2 45°} = \sqrt{6378{,}099\cdot 0{,}00981\cdot 0{,}5} = 5{,}5932\ Km/sc$$

- per ρ_3>45° e h>R e la sua Velocita sarà $\mathbf{V_f > V_p}$.

dove V_f è la vera velocità di fuga perché dal punto P (rosso in figura) la traiettoria di rientro della parabola non incontrerà più la circonferenza.

In (**) il valore $R/_{cos^2\rho_3}$ dà la distanza dal centro infinita e di conseguenza la velocità residua nulla, per cui i termini di **energia cinetica ed energia potenziale** si annullano quindi:

$\frac{1}{2}mV_f^2 = G\frac{Mm}{R}$ che risolta per V_f è

$V_f = \sqrt{\frac{2GM_{Terra}}{R}} = \sqrt{2gR_{Terra}} = 11{,}18;$

tale velocità è indicata come "velocità di fuga" mentre quella indicata da noi è la velocita di non ritorno (no impatto).
La differenza in letteratura, tra V_c e V_f è $\sqrt{Rg} \rightarrow \sqrt{2Rg}$

Abbiamo tracciato la Velocità utilizzando la traiettoria della parabola, chiamando V_f = velocità di fuga, quando V_f>V_p.

Volendo alle stesse condizioni si può risolvere il problema anche mediante la traiettoria di una Iperbole. Nel caso della traiettoria della Ellisse invece si ha che questa impatta sempre anche per valori V_f>V_p.
Per avere una idea delle tre traiettorie si può vedere l'applet: AP112 CAP.XI MOTO VERTICALE GEOGE.
****

ESEMPI:

1) Il satellite artificiale **Oscar** ruota alla distanza di 1450 Km con V_{c0}=7,14 (Km/sec) e V_f=10,09 (Km/sec). Verifichiamo le formule: **h=1450=$R_T$tan²ρ** (6.) (R di figura = R_T=6378,099 Km raggio equatoriale Terra, G=6,70^{-8} e g=$(V_C)^2/R_T$=0,00981 Km/sec² la sua gravità superficiale; e Massa Terra = 5,976^{24} Kg) per cui da 6.:

$\rho = \arctan\sqrt{\frac{1450}{6378{,}099}} = 25{,}491915$ angolo della tangente in P_3

per (**) $V_C = \sqrt{\boldsymbol{R_T g} cos^2 25{,}491915} = 7{,}13999 = 7{,}14\ Km/sec$

e $V_C = \sqrt{\frac{GM_{Kg}\ cos^2 25{,}491915}{R_T}} = \sqrt{\frac{3{,}98599^{17}\ \ 0{,}81476}{6378{,}099}} = 7{,}135715 Km/sec$

Per **R_3=R_T+h=7828,099** il valore dell'Altezza (ordinata) e semi Gittata (ascissa) è data dall'angolo tangente:

$$\begin{cases} x_3 = -R_3 \sin 2\rho_3 = -7828.099 \sin 50{,}98383 = -6082{,}184959 \\ y_3 = R_3 \cos 2\rho_3 = 7828{,}099 \cos 50{,}98383 = 4928{,}099032 \end{cases}$$

o dall'angolo della parabola $\beta_3=(90+2\rho_3)=140{,}98383$:

$$\begin{cases} x_3 = R_3 \cos\beta_3 = 7828{,}099 \cos 140{,}98383 = -6082{,}184959 \\ y_3 = R_3 \sin\beta_3 = 7828.099 \sin 140{,}98383 = 4928{,}099032 \end{cases} :$$

per entrambi è $\boldsymbol{R_3} = \sqrt{y_3^2 + x_3^2} = 7828{,}09899 = (\boldsymbol{R_T} + \boldsymbol{h})$ e le coordinate di **Oscar sono** (-6082,184969;4928,099032)

Massa del satellite.

In $V_C = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = 7{,}14$ con G=6,670^{-11} abbiamo $M=M_T+M_S$, ma se sommiamo la massa della Terra + la massa del satellite, essendo quest'ultimo piccolissimo in realtà abbiamo $M=M_T+M_S=M_T=5{,}976^{27}$, senza nessuna variazione sensibile alla massa della Terra.
Dunque se voglio la massa M_S del satellite debbo procedere:

$V_C = \sqrt{\frac{GM_S\ cos^2\rho}{h}} = 7{,}14$ quindi $M_S = \frac{V_C^2\ h}{G\ cos^2\rho}$ cioè la massa-satellite che percorre effettivamente il solo tratto h=altezza. Nel nostro caso:

$$M_S = \frac{(7{,}14)^2\ 1450}{G\ cos^2 25{,}491915} = \frac{73920{,}42}{0{,}000000054} = \frac{73920{,}42}{54^{-9}} = 1360{,}8896666\ kg$$

****

2) Il satellite artificiale **Noaa-3** ruota alla distanza di 1515 Km con V_{c0}=7,11 (Km/sec) e V_f=10,05 (Km/sec). Verifichiamo le formule:

h=1515=$R_T$tan^{2}ρ (6.) (R di figura = R_T=6378,099 Km raggio equatoriale e g=0,00981 Km/sec^2 la sua gravità superficiale) per cui:

$\rho = \arctan\sqrt{\frac{1515}{6378{,}099}} = 25{,}983313571$ angolo della tangente in P_3

per **(**)** $V_C = \sqrt{\boldsymbol{R_T g} cos^2 25{,}983313571} = 7{,}11053 = 7{,}11\ Km/sec$

Per **$R_3=R_T+h=7893{,}099$** avremo l'Altezza e Gittata come per OSCAR; usando l'angolo della parabola $\beta_3=(90+2\rho)=141{,}96662714$:

$$\begin{cases} x_3 = R_3 \cos\beta_3 = 7893.099 \cos 141{,}96662714 = -6217{,}015351 \\ y_3 = R_3 \sin\beta_3 = 7893{,}099 \sin 141{,}96662714 = 4863{,}099006 \end{cases}$$

$$R_3 = \sqrt{y_3^2 + x_3^2} = 7893{,}09899$$

****

3) I **Satelliti Stazionari** ruotano alla distanza di 35.873 Km alla velocità V_C=3,07 e V_f=4,34. Come sopra:

$$\rho = \arctan\sqrt{\frac{35\,873}{6378{,}099}} = 67{,}13653663$$

$$V_C = \sqrt{\boldsymbol{R_T g} cos^2 67{,}13653663} = 3{,}073333979 = 3{,}07\ Km/sec$$

(*Nel caso della Terra il satellite geostazionario deve percorrere l'orbita circolare in un tempo uguale al giorno siderale,*

T_{gs} = 23 h 56 min 4,09 s = 86164,09 s.

Il corrispondente raggio di questa orbita (distanza stazionaria), può essere determinato con la terza legge di Keplero:

$$R_3 = (R_T + h) = \sqrt[3]{\frac{GMT_{gs}^2}{(2\pi)^2}} = 42164\,km\,;h = 42164 - 6378{,}099 = 35785{,}901\ )$$

****

4) Satellite **Luna** (? leggo dalla letteratura) ha distanza 377632 Km dalla Terra con velocità 1,0188

$$\rho\ = \arctan\sqrt{\frac{377\,632}{6378{,}099}} = 82{,}59531581$$

$$V_C = \sqrt{\boldsymbol{R_T g}cos^2 82{,}59531581} = 1{,}019423021 = 1{,}0194\,Km/sec$$

Velocità vicina alla velocità Draconitica.
****

Velocità angolare. Questa **SEZIONE** è generalizzata e vale per i quattro esempi proposti, data l'altezza. Tale **velocità** indica quella dei satelliti proposti rispetto alla Terra: essa prescinde dalla velocita data al Satellite.

I satelliti, sappiamo, hanno una Traiettoria Circolare con centro nel Centro di Massa del relativo Pianeta (Terra), ma secondo quanto stabilito dal "Teorema dei Pianeti" debbono anche avere distanze date dai valori dei raggi vettori ellittici, che indicheremo.
Nella spiegazione che segue ci riferiremo a **Oscar**.
Sia il punto di lancio **P_0=A_0** con A_0 punto di un osservatore e punto della circonferenza (Pianeta) e P_0 (satellite) punto di partenza del lancio e della parabola: il satellite P_0 ha velocità sulla parabola diversa da quella del punto A_0 dell'osservatore sulla circonferenza.

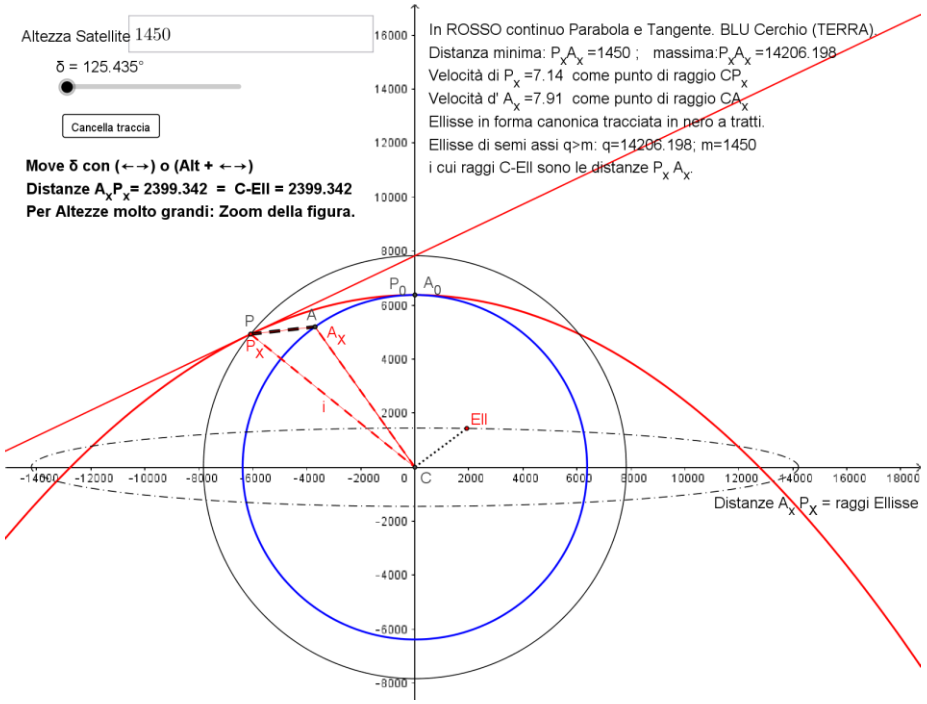
Infatti il punto P_0 raggiunta l'**Altezza** massima stabilita diventa punto P_x (vedi figura) e viene a coincidere con la nuova circonferenza di raggio (R_T + Altezza), avendo il corrispettivo punto A_x sulle circonferenza di partenza (Pianeta Terra); i punti P_x e A_x avranno velocità angolari diverse, questo perché gli angoli (β) della parabola e (α) della circonferenza, non hanno la stessa velocità angolare come si evidenzia analizzando la Parabola Parametrica tipo (p-y), che indica il rapporto esistente tra i due angoli (GEOMETRIA PARAMETRICA CAP.V Pag.6):

$\cos\alpha = \frac{1+\sin\beta_3}{2}$; $(\beta_3 = 90° + 2\rho_3)$ che vale

$\cos\alpha = \frac{1+sin140{,}98383}{2} = 0{,}814769846$ $\alpha = 35{,}43538886 + 90° = 125{,}4353888$;

e indica rispetto alla circonferenza di partenza, le coordinate di A_x:

$$\begin{cases} R_T\ \cos\alpha = 6378{,}099 \cdot cos125{,}4353888 = -3697{,}923107 \\ R_T\ \sin\alpha = 6378{,}099 \cdot \sin 125{,}4353888 = 5196{,}682744 \end{cases}$$



I nuovi punti P_x (satellite)e A_x (osservatore) ora appartenenti alle due circonferenze hanno diverse velocita angolare con P_x velocita del satellite (in Oscar 7,14), indicato tramite l'altezza, e A_x velocità (7.91) dell'osservatore sulla Terra, proprie delle due circonferenze: da questi punti in poi correranno sulle due circonferenze con diverse velocità angolari.

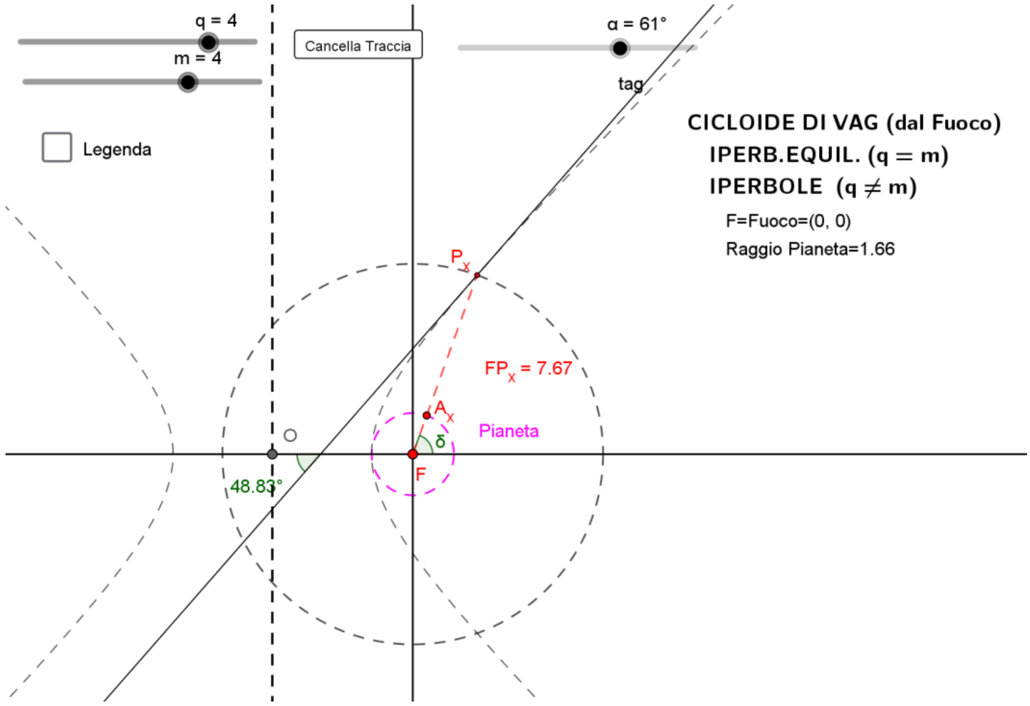
VEDI l'applet della AP110 CAP.XI TRAIETTORIA DI UN SATELLITE la quale fornisce i dati numerici del satellite Oscar, o degli altri satelliti quando caricati al posto di Oscar.

Poichè siamo in presenza del moto di due circonferenze, la rotazione della Terra in blu e del satellite Oscar (o altro satellite) in nero, con velocità angolari diverse, possiamo allora applicare "Il Teorema dei Pianeti" per cui le distanze tra i due punti P_x e A_x sono distanze di ellisse e sono riportate dal punto in rosso Ell=P_x-A_x e tracciate come in figura su conica di semiassi $(R_3+R_T)>(R_3-R_T)$.

Il Teorema dei Pianeti indica le distanze dell'ellisse data dalle distanze P_x-A_x ma dice anche che la traiettoria (curva) Ellisse non esiste.

****

Abbiamo indicato i valori dei satelliti in orbita come fossero stati posti in posizione secondo una traiettoria Parabolica, ma avremmo potuto calcolarli tramite una traiettoria Iperbolica, come mostriamo qui in figura:



Applet: AP111 CAP.XI IPERBOLE FUOCO

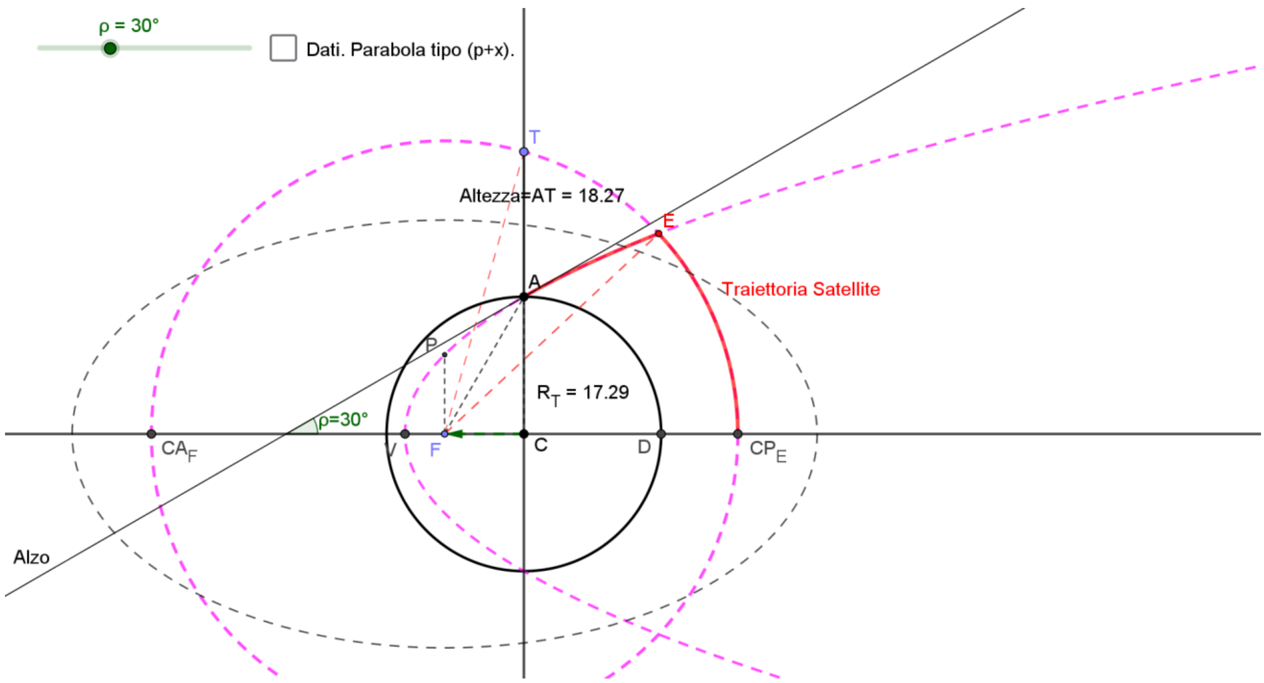
M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CONCLUSIONE: se tutti i pianeti ruotano secondo moti circolari ed uno rispetto all'altro con distanze ellittiche, TALE LEGGE varrà per tutti i Satelliti, sia rispetto al proprio Pianeta che rispetto al Sole o a qualunque altra stella.
Come infatti abbiamo visto nel CAP.III: MOTO DI RIVOLUZIONE e CAP.V: LEGGI DEL MOTO DEI PIANETI
A) «I Pianeti ruotano secondo proprie Orbite Circolari e tutti, uno rispetto all'altro, con distanze Ellittiche».
Queste distanze ellittiche oltre che essere dimostrate dal "Teorema dei Pianeti", sono indicate dal moto della "Cicloide Ellittica" (vedi avanti "CICLOIDI", punto A) Fig.2).
B) Lo spostamento da un sistema all'altro avviene con una curva data dalla loro velocità ma con traiettoria indicata dalla "CICLOIDE DI VAG"» (vedi avanti).

CAP.XII PARABOLA DEL MOTO TRAMITE UNA SUA TANGENTE O ALZO

Come visto nel CAP.XI TRAIETTORIA PARABOLICA DI UN SATELITE questi è lanciato perpendicolarmente alla tangente in un punto di partenza della circonferenza del Pianeta e il suo moto finale sarà ancora circolare con centro nel centro del pianeta stesso.
Ma un satellite può essere anche lanciato da un punto del pianeta con una direzione e verso non perpendicolare ma tangente nel punto con un angolo qualunque detto ALZO.
La sua traiettoria finale sarà ancora una circonferenza, come stabilisce la legge del moto, ma il suo centro non coinciderà più con il centro del Pianeta (tranne nel caso di un ALZO di 45°) ma coinciderà con il fuoco della traiettoria (nel nostro esempio della Parabola) e le distanze delle circonferenze date dal Pianeta e dal moto del satellite essendo decentrate avranno valore ellittico, come stabilito dalla Legge del Moto e dimostrato dal "TEOREMA DEI PIANETI".
Nel caso di un ALZO di 45° il punto fuoco della parabola e il centro del pianeta coincidono, nello stesso modo di un lancio perpendicolare.
Come dalla figura sotto AP120 CAP.XII MOTO TRAMITE ALZO



sia una circonferenza di centro C (in nero) e raggio CA=R_T e sia ρ angolo (alzo) di una retta in A(0,y)=(0,R_T) e tale retta sia anche la tangente in A ad una parabola; A è punto comune alle due figure. Inizieremo usando la tangente relativa ad una Parabola del tipo:

$(p+x)$ *oppure* $\frac{p}{1-\cos\beta}$; $\lfloor y^2 = p^2 + 2px \rfloor$

spostata del valore CF secondo figura, parabola vista in CAP.IX "RIDEFINIZIONE DELLA PARABOLA", con CFA=β angolo della parabola al Fuoco, p=parametro e il valore della tangente:

$\tan\rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1-\cos\beta}{sen\beta}$ e (tanβ=tan2ρ)[9] **1]**

$$\left| y^2 = p^2 + 2px\,;\ x = \frac{y^2 - p^2}{2p} = \frac{y^2 - y^2\tan\rho^2}{2y\tan\rho};\ \frac{y}{x} = \frac{2\tan\rho}{1-\tan\rho^2} = \tan\beta = \tan 2\rho \right|$$

Il punto A(0,R_T) è anche punto della parabola, e il suo valore y(A)=R_T è anche valore dell'ordinata di A nella parabola e ci permette di calcolare la 1] ottenendo il valore FP=p=parametro della parabola:

FP=p=ytan(ρ)= $R_T$tan(ρ)

Se y(A) è l'ordinata di A nella parabola cerchiamone l'ascissa rispetto al punto F. Come punto della parabola (p+x) abbiamo i valori A=(CF,R_T) e dalla relazione angolo CFA=β=2ρ noto ρ:

$$\tan\beta = \frac{R_T}{CF} \qquad CF = \frac{R_T}{\tan\beta} = \frac{R_T}{\tan 2\rho} \quad allora \quad x(A) = CF = \frac{R_T}{\tan 2\rho}$$

quindi $A = (-\frac{R_T}{\tan 2\rho}, R_T)$ con <u>x(A)=CF negativo</u> perché a sinistra di C, origine del riferimento, di cui la figura, ed in questo il Fuoco avrà coordinate F$\left(-\frac{R_T}{\tan 2\rho}, 0\right)$ il che ci permette di scrivere l'Eq. della parabola indicata nella nostra applet (in Magenta a tratti):

$$\begin{cases} \frac{p}{1-\cos\beta}\cos\beta + x(F) = x \\ \frac{p}{1-\cos\beta}\sin\beta = y \end{cases}$$ o per punti: $y^2 = p^2 + 2p(x + CF)$

Tale parabola, con β conteggiata in F, è la stessa parabola di partenza, ma con il fuoco spostato dall'origine per il nuovo valore di (CF).

In funzione del valore della variabile ρ (alzo) della tangente in A, possiamo ottenere qualunque altra parabola.

Nel CAP.X precedente, abbiamo visto come una parabola si possa trasformare in una circonferenza: cerchiamo dunque la parabola che dia la circonferenza passante per un dato punto T (AT= Altezza). Sia **FT = FE = R_S** (raggio della circonferenza in rosso per T) essendo E punto della parabola e della nuova circonferenza del satellite: abbiamo anche visto nel CAP.X, che se la variabile α diviene α_1=costante la parabola diventa una circonferenza. Cerchiamo α_1

$$\left(\frac{R}{\cos\alpha_1} = R_S\right) \Rightarrow \cos\alpha_1 = \frac{p/2}{R_S}$$ dove R=FV=FP/2=p/2

possiamo ora scrivere l'equazione parametrica della parabola rappresentante anche una circonferenza

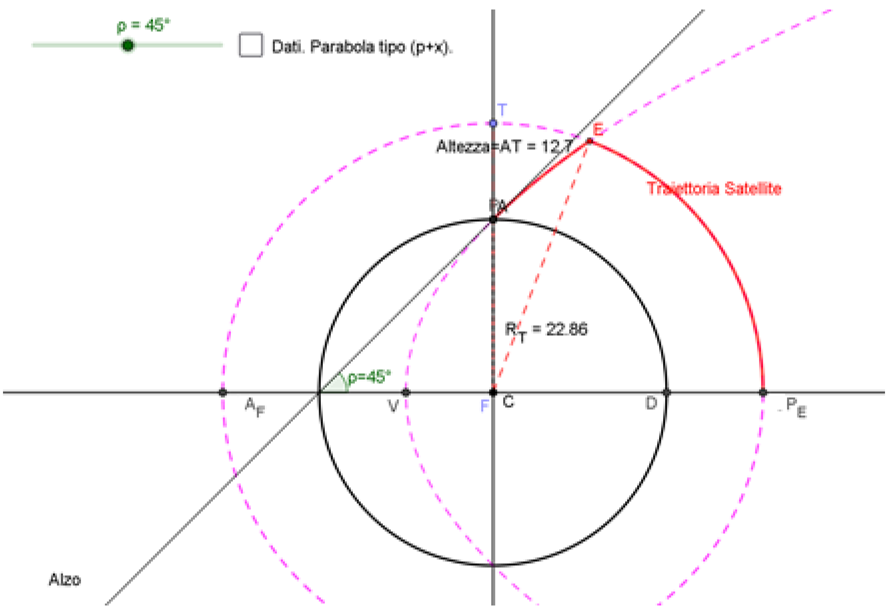
[9] *Geometria Parametrica Cap.III BIS Pag. 4*

$$\begin{cases} \dfrac{p/2}{\cos\alpha_1}\cos\beta = x = \dfrac{p/2}{\cos\alpha_1}(1-2\cos\alpha)+CF = R_S(1-2\cos\alpha)+CF \\ \dfrac{p/2}{\cos\alpha_1}\sin\beta = y = \dfrac{p/2}{\cos\alpha_1}\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] = R_S\left[\pm 2\sqrt{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}\right] \end{cases}$$

rappresentante il moto del satellite di raggio R_S passante per T, di centro in F (in Rosso pieno nella figura con $\cos\alpha = \frac{1-\cos\beta}{2}$) : il moto è circolare, ma le distanze dei suoi punti dalla circonferenza di centro in C e raggio $CA=R_T$ sono ellittiche, come prescrive la Legge del Moto. L'ellisse virtuale, cioè le sue distanze ellittiche, possono essere visualizzate con centro in F, fuoco della parabola, con asse-minore o asse-maggiore sull'ascissa (vedi figura).
Applicando il "TEOREMA DEI PIANETI" troviamo le distanze ellittiche date dalla figura con CP_E=m=semiasse-minore e CA_F=q=semi asse-maggiore; da cui le equazioni

Curva $\begin{cases} x = CP_e\, cos\alpha = m\, cos\alpha \\ y = CA_f\, sin\alpha = q\, sin\alpha \end{cases}$ e a punti $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$ (NERO a tratti)

Per l'ALZO a 45° indichiamo la figura:



come si vede il fuoco della parabola coincide con il centro del riferimento alle stesse condizioni dell'Alzo a 90°, che abbiamo visto precedentemente: pertanto il satellite ruota secondo una circonferenza di raggio $CA_F=CP_E$. In questo caso le ellissi sono date dalla differenza di velocità, tra due punti sulle circonferenze (distanza AE della figura).

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CAP.XIII CICLOIDI

Racconta Vitruvio, Architetto dell'antica Roma, nella sua opera "De Architettura", che a quei tempi a Roma si affittavano per il trasporto di merci o persone, Carri, trainati da animali da soma, muniti di un congegno, che consisteva in un meccanismo che ad ogni tanti giri della ruota lasciava cadere, in un opportuno recipiente, un sassetto, contando i quali, si poteva sapere, dai giri delle ruote, quanta strada era stata fatta e per quanto tempo gli animali avevano potuto riposare: insomma un sistema che si usa ancora oggi, quando prendiamo un taxi.
Un millennio più tardi, qualcuno, ispirato dal numero di giri che la ruota faceva rotolando sul terreno (senza slittare!!), pensò che per poterne contare i giri, sulla ruota si sarebbe dovuto segnare un Punto di arrivo-partenza.
Propose, allora, la soluzione dell'interessante problema di tracciare la traiettoria del Punto indicato.
La soluzione di tale problema rimase come definizione delle curve ottenute con il nome di CICLOIDI: tant'è che ancora oggi nel definire la curva, come risultato di un punto segnato su una ruota, spesso si aggiunge la precisazione "senza slittare" a retaggio del carro che procedeva dietro le some che potevano sporcare facendo scivolare la ruota.

Diamo invece la definizione geometrica della Cicloide:
«Un punto che ruota secondo una circonferenza il cui centro migra secondo una determinata figura, descrive una curva detta CICLOIDE».
(Più in generale si può sostituire la circonferenza con una ellisse.)

La prima figura che viene in mente è la molla: essa è data dalla traiettoria di un punto che ruota secondo una circonferenza mentre il suo centro migra secondo la perpendicolare ad essa.
Data la definizione possiamo riunire tutte le cicloidi in una unica formula algebrica, in un riferimento cartesiano e in forma parametrica:

$$\begin{cases} OA\ \cos\beta = R\ cos\alpha + C_x \\ OA\ \sin\beta = R\ sin\alpha + C_y \end{cases}$$

dove OA è la distanza del punto A dal cento del riferimento, R è raggio della circonferenza, α l'angolo della circonferenza e i valori C_X e C_Y sono i valori delle coordinate dei punti della figura in cui il centro della circonferenza emigra.

Per fare un paragone con la letteratura prendiamo come esempio la cicloide regolare, dove la ruota viene fatta rotolare per un distanza Rα cioè di una distanza pari al perimetro della circonferenza. Volendo procedere con la formula indicata avremo che il centro della circonferenza si muoverà per $C_X = R\alpha$ e $C_Y=0$ quindi:

$(x = R\cos\alpha + R\alpha, \qquad y = R\sin\alpha + 0)$

affinchè l'immagine che si ottiene coincida con quella della letteratura il punto di partenza sulla circonferenza deve iniziare:

$$\begin{cases} OA\ \cos\beta = R\cos(90° + \alpha) + R\alpha \\ OA\ \sin\beta = R\sin(90° + \alpha) + 0 \end{cases}$$ (concavità verso l'alto)

$$\begin{cases} OA\ \cos\beta = R\sin(180° + \alpha) + R\alpha \\ OA\ \sin\beta = R\cos(180° + \alpha) + 0 \end{cases}$$ (concavità verso il basso);

è da aggiungere che se la percorrenza del centro del cerchio è un valore (d) qualunque diverso da $R\alpha$, avremo una cicloide allungata o accorciata, per un valore superiore o inferiore.

A) Se poniamo $C_X = (R\pi)\cos\alpha$ e $C_Y=0$ la curva diventa una ellisse.

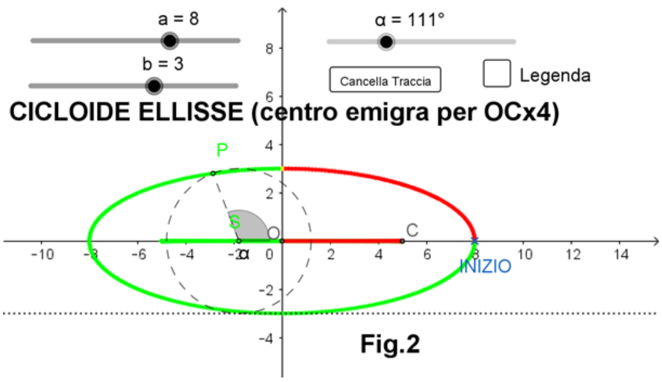
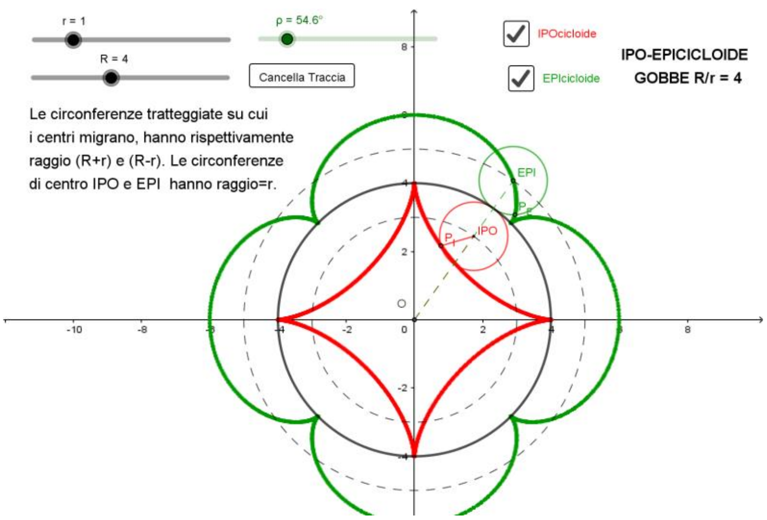


Fig.2

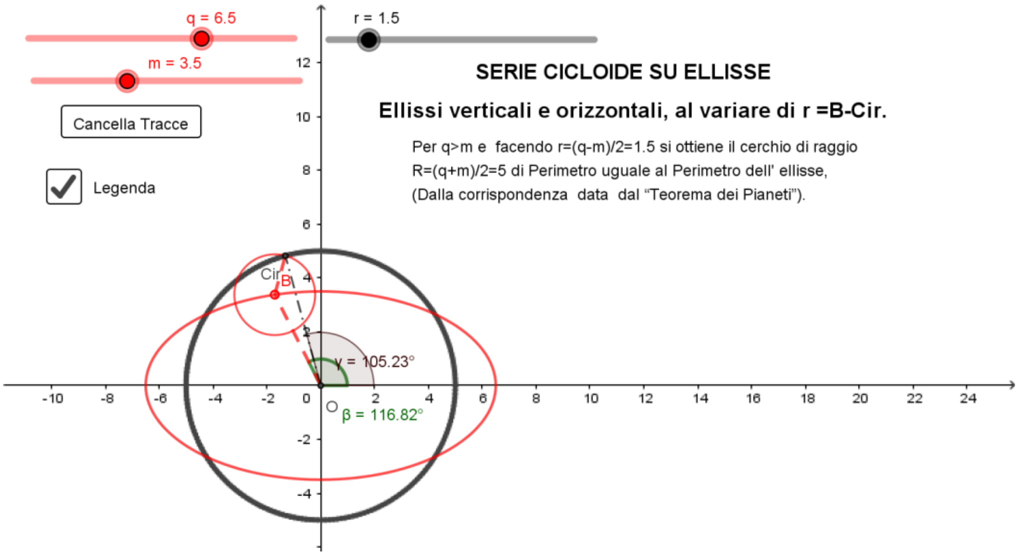
Possiamo anche tracciare la **ellisse** (di semi-assi a>b) costruita come **cicloide**, ponendo R=b e il centro della circonferenza che emigra per $C_X = (a-b)\cos\alpha$ e $C_Y=0$. Vedi applet ***(Geogebra.org)***

B) Per la cicloide data da una circonferenza il cui centro migra



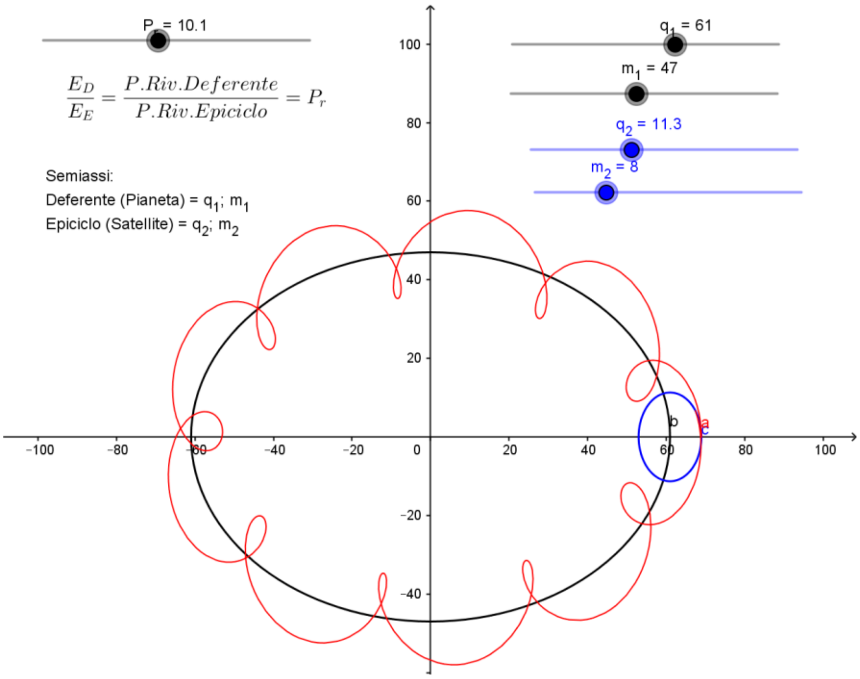
secondo una circonferenza abbiamo i tracciati della Ipocicloide ed Epicicloide a seconda che la circonferenza ruoti in senso orario o antiorario. Applet 8CAPVIII IPO-EPICICLOIDE

C) La serie cicloide su ellisse traccia una traiettoria (in nero) che può essere una circonferenza o una ellisse:



Abbiamo indicato le cicloidi come traiettoria di un punto di circonferenza il cui centro emigra su una retta, una circonferenza o una ellisse, ma il punto può essere punto di una ellisse anziché di una circonferenza; come nel caso più generale della astronomia in cui si parla di Deferente e Epiciclo (traiettoria in rosso):

****



M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

CAP.XIV CICLOIDI DI VAG O FUNZIONI CIRCOLARI CONTINUE

Esiste anche un altro tipo di cicloide, la Cicloide di Vag, di cui diamo la definizione:

La Curva tracciata da un Punto che ruota secondo una circonferenza, con centro fisso, ma il cui raggio varia in lunghezza, in funzione dell'angolo al centro.

(Ogni Curva regolare data da una Funzione continua, in un determinato intervallo, può essere interpretata e tracciata come una "Cicloide di Vag").

Ne mostriamo la parabola con il fuoco nell'origine, aperta a destra del tipo $y^2 = 2px + p^2$ utilizzando l'equazione parametrica di questa:

$$\begin{cases} \dfrac{R}{\cos\alpha}\cos\beta = x = \dfrac{R}{\cos\alpha}(1 - 2\cos\alpha) \\ \dfrac{R}{\cos\alpha}\sin\beta = y = \dfrac{R}{\cos\alpha}\left(\pm 2\sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos\alpha)}\right) \end{cases} \qquad \cos\beta = (1 - 2\cos\alpha)$$

Se un punto ruota secondo una circonferenza mentre il raggio di questa aumenta la sua lunghezza si ottiene una PARABOLA di parametro p=2R, con il fuoco nell'origine e R= Fuoco-Vertice: come da figura 3.

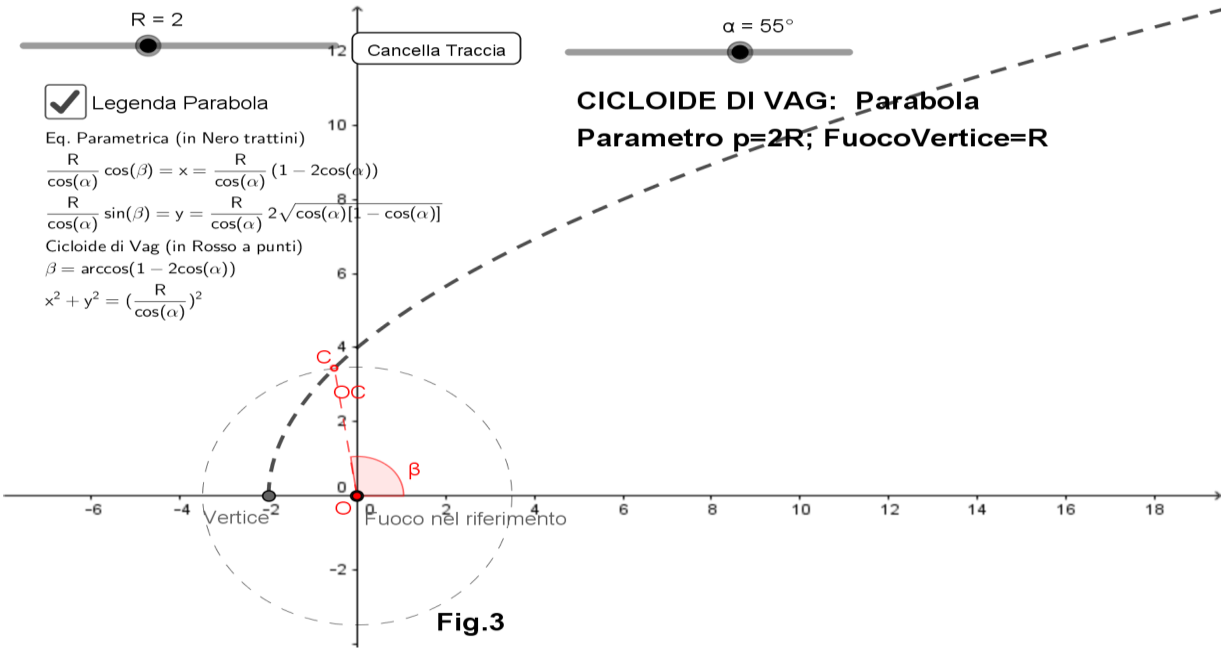


Fig.3

Applet GEOGEBRA Fig.3 (Clicca qui)

Non solo la parabola ma anche le altre coniche possono essere tracciate come cicloidi di Vag, in quanto funzioni continue.

Nella Fig.2 abbiamo una circonferenza il cui centro è fisso, ma ora il suo raggio CA aumenta in lunghezza proprio come una Cicloide di Vag; avremo come risultato sempre una ellisse ma data dal moto di un punto su una circonferenza il cui raggio aumenta di lunghezza: vedi GEOGEBRA Fig.2 *(Clicca qui)*

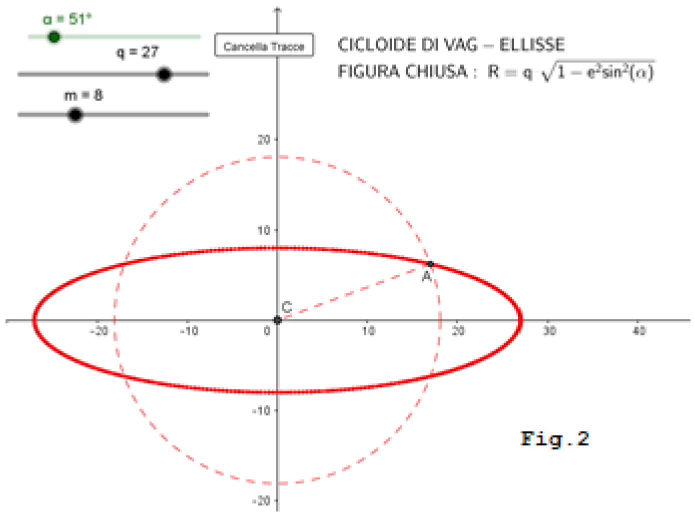


Fig.2

Analogamente abbiamo una Iperbole e una Iperb. Equilatera data da una circonferenza di centro nel Fuoco e raggio rispettivamente

$FC = \frac{q}{\cos\alpha}(e - \cos\alpha)$ e $FC = \frac{q}{\cos\alpha}\left(\sqrt{2} - \cos\alpha\right)$ come in Figura 5.

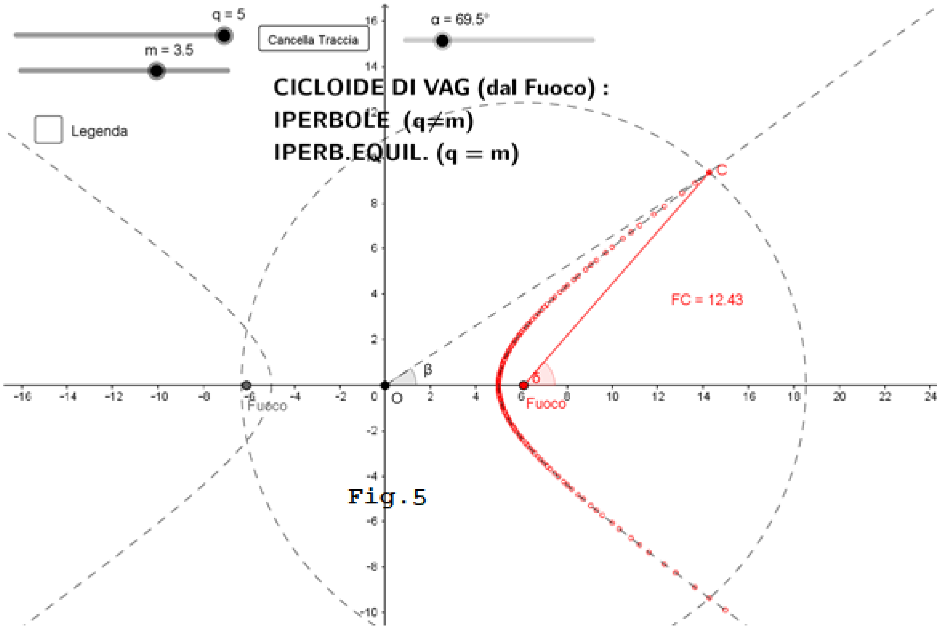


Fig.5

Applet GEOGEBRA Fig.5 (Clicca qui)

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

RIEPILOGO DELLE CICLOIDI DI VAG

Data una circonferenza di raggio=R e angolo $\alpha \in (0,2\pi)$.

*****FIGURE CHIUSE

- $R = \sqrt{q - c^2 \sin^2 \alpha} = q\,|\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}\,|$ ELLISSE centro nel riferimento;
  assi q>m e angolo $\beta = arc\tan\frac{m}{q}\ \tan\alpha$

- $R = (q - c\cos\alpha) = q\,(1 - e\cos\alpha)$ ELLISSE centro nel fuoco;
  assi q>m e angolo $\delta = arc\tan\frac{m\sin\alpha}{q(\cos\alpha - e)}$

*****FIGURE APERTE

La SPIRALE è Cicloide di Vag nel PIANO

La MOLLA a spirale è Cicloide di Vag nello SPAZIO

- $\frac{R}{\cos\alpha}$ CIRCONFERENZA di angolo α: semiretta.

****

- $\frac{R}{\cos\alpha}$ PARABOLA centro nel Fuoco; R=p/2 p=parametro
  di angolo β=arccos(1-2cosα).

(Vedi Geometria Parametrica "Parametri" Cap.V Pag.4)

************* IPERBOLE con riferimento nel CENTRO

- $\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{q}{\cos\alpha}\sqrt{1 + \left(\frac{m}{q}\right)^2 (\sin\alpha)^2}$ IPERBOLE e IPER. EQIL se m=q.
  assi q ≠ m e di angolo $\beta = arc\,tan\frac{m}{q}\sin\alpha$

svolgendo: $\frac{q}{cos\alpha}\sqrt{1 + tan^2\beta} = \frac{q}{cos\alpha\ cos\beta}$ abbiamo una diversa

IPERBOLE $\begin{cases} \frac{q}{cos\alpha\ cos\beta}\ cos\beta = \frac{q}{cos\alpha} = x \\ \frac{q}{cos\alpha\ cos\beta}\ sin\beta = \frac{q}{cos\alpha}\ tan\beta = y \end{cases}$ con m implicita

*************** IPERBOLE con riferimento nel FUOCO

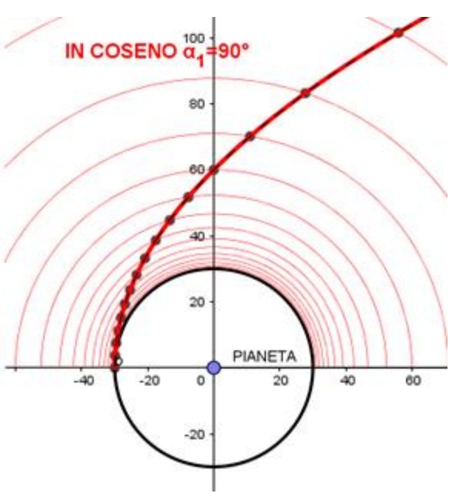
- $\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{q}{\cos\alpha}\,(\mathrm{e} - \cos\alpha)$ IPERBOLE;
  assi q≠m di angolo $\delta = arc\tan\frac{m\sin\alpha}{q(1 - e\cos\alpha)}$

- $\frac{R}{\cos\alpha} = \frac{q}{\cos\alpha}\left(\sqrt{2} - \cos\alpha\right)$ IPERBOLE EQUIL. dove $e = \sqrt{2}$ costante:
  assi q=m e di angolo $\delta = arc\tan\frac{\sin\alpha}{(1 - \sqrt{2}\cos\alpha)}$

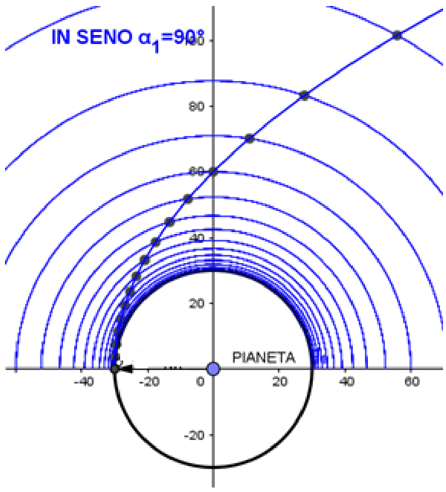
(Vedi Geometria Parametrica "Le Curve" Cap.III)

CAP.XV LA CICLOIDE DI VAG E LA RELATIVITA' DI EINSTEIN

Nella sua relazione Einstein spiega che la causa della curvatura gravitazionale, determinata dalla massa di un corpo, deforma lo spazio-tempo e attira corpi di massa più piccola. La letteratura dà l'esempio di una "buca", ottenuta dalla massa di un corpo posto su un telo steso, che attira corpi di massa più piccoli.
E' implicito che parlare di velocità implica il concetto di Einstein di spazio-tempo, e le Cicloidi di Vag danno la misura geometrica di tale tracciato con l'ipotesi della deformazione.
Qui ci limitiamo ad indicare la curvatura della parabola, quale esempio mediante un applet, che compendia la tesi.
Nel capitolo "CAP.XI TRAIETTORIA PARABOLICA DI UN SATELLITE" la curva del satellite è ottenuta da due velocità: quella circolare del punto di appartenenza e quella imposta alla partenza.
Ora invece consideriamo la massa di un corpo (un pianeta) che viaggia nello spazio ed ha una velocità tangenziale continua propria, che può essere disturbata dalla vicinanza di un altro corpo, disturbo che può causare una deviazione alla sua traiettoria o concludersi con un impatto. Ciò vuol dire che il verso della velocità tangenziale della massa più piccola viene deviato da quella più grande, fino a farle assumere una curva continua secondo il dettame della Cicloide di Vag.
I grafici mostrano che il punto massa, sia che venga risucchiato sia che venga espulso, in effetti, rispetto alla massa più grande, si presenta ad ogni istante come punti(nodi) di circonferenza della massa più grande, punti che determinano una curva parabolica.
[AP100 CAP.X EQ PARAB PARAMETRICA].



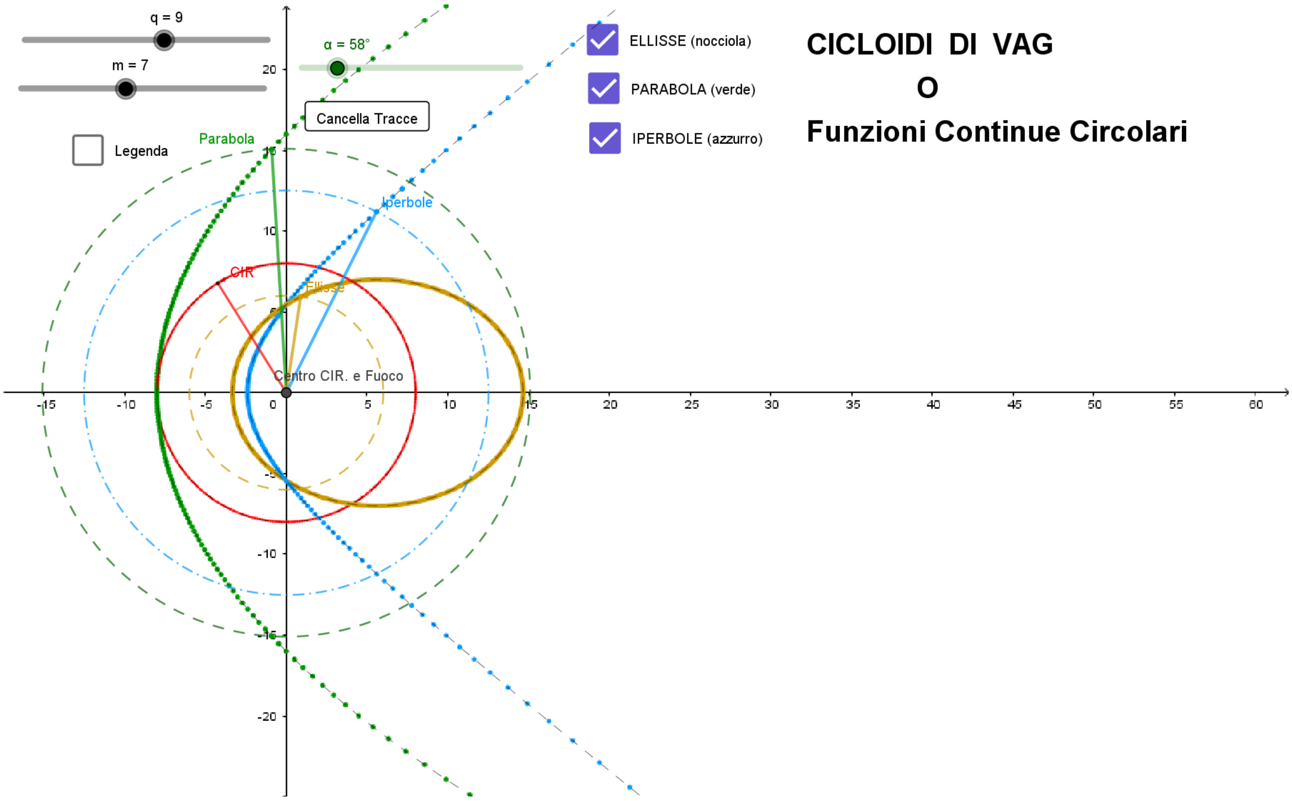
Nel



Nel caso in esame se la velocità tangenziale delle due masse coincide in uno dei suoi nodi, la massa più piccola viene cattura e sarà satellite della più grande alla relativa distanza; se invece diverse, la massa più piccola subirà una deviazione tanto più sensibile quanto più grande è la differenza di velocità delle due masse in quel nodo, ed assumerà una nuova traiettoria, parabolica come nel nostro esempio.

AP160 CAP.XV RELATIVITA' DI EINSTEIN.

Infatti nell'applet, a seguire, l'esempio mostra che il variare di tale velocità sui nodi delle circonferenze, determina una curva diversa e continua, che abbiamo ipotizzato come curve coniche, che conosciamo, ma che possono essere invece diverse.



Vedi applet **Geogebra.org**

M.Vaglieco

VAI SOMMARIO

APPENDICE

VAI SOMMARIO

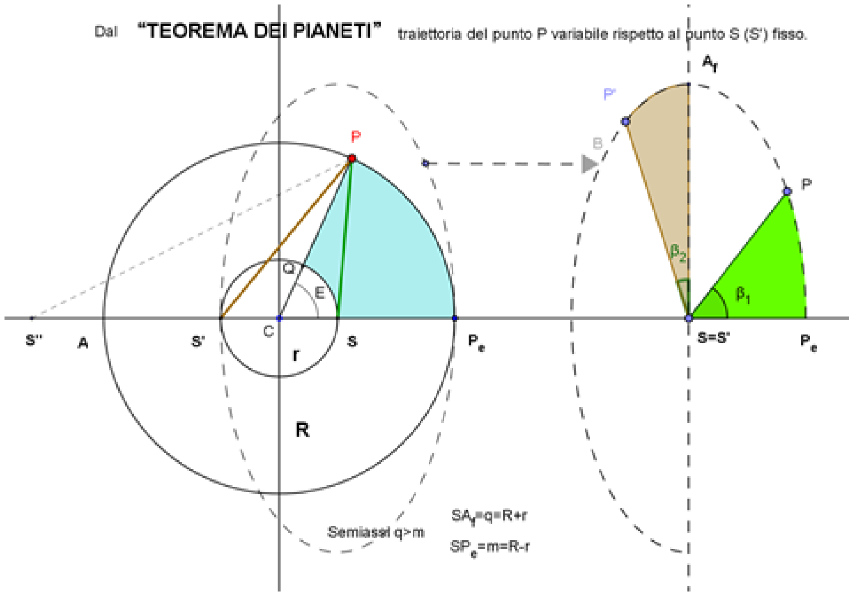
APPEND.10 IL TEOREMA DEI PIANETI

Ecco l'enunciato del Teorema dei Pianeti:

«Data una circonferenza, ed un qualunque punto-fisso nello spazio, che non appartenga alla perpendicolare al centro di tale circonferenza, la sua distanza dai punti della circonferenza sono vettori di ellisse, la traiettoria (apparente) di una ellisse e il punto fisso il suo centro.

Inoltre tale dimostrazione geometrica non è che la soluzione algebrica di un sistema di primo grado a due incognite, qui riassunte: dati due valori ***a e b*** *esistono altri due valori* ***R e r***

tali che: $\begin{cases} R+r=a \\ R-r=b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2R=(a+b) \\ 2r=(a-b) \end{cases}$ $4Rr=(q^2-m^2)=c^2$



Ma l'importanza di questo teorema, è la corrispondenza biunivoca tra ellisse e circonferenza e la trasformazione della figura dalla formula stessa. Infatti da ciò che abbiamo visto precedentemente:

$$\rho = (\overline{OR - MN}) = \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos E}$$

facendo $E = 2\left(\frac{E}{2}\right)$ e moltiplicando R^2 e r^2 per $\left(cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + sin^2\left(\frac{E}{2}\right)\right)$ con facili passaggi si ottiene

$$\rho = (\overline{OR - MN}) = \sqrt{(R-r)^2 cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + (R+r)^2 sin^2\left(\frac{E}{2}\right)}$$

e posto (R+r)=**a** semi-asse maggiore e (R-r)=**b** semi-asse minore

$$\boldsymbol{\rho = (\overline{OR - MN}) = \sqrt{b^2 cos^2\left(\frac{E}{2}\right) + a^2 sin^2\left(\frac{E}{2}\right)}}$$

vale a dire i punti MN e OR pur movendosi secondo circonferenza hanno distanze tra loro di raggi di ellisse: giusta l'affermazione di Keplero.

La differenza angolare tra E ed E/2 che avviene nella trasformazione indica la differenza del valore della velocità angolare tra circonferenza ed ellisse, come indicato dall'analisi.

Noi osserviamo il moto primario dei punti MN e OR, circolare rispetto al proprio Centro di Massa, mentre il moto ellittico è *indicato solo dal valore della loro distanza*, proprio come è risolto da **Newton**, il quale ottenne implicitamente una ellisse studiando ***l'interazione tra le Masse.***

In altre parole la **ellisse non esiste**, l'espressine algebrica non traccia una traiettoria ma ne indica soltanto la distanza.

Facciamo un esempio pragmatico:
prendo il sole all'equatore; rispetto al centro della geosfera (la Terra come sfera) traccio una circonferenza; prendiamo ora il punto Nord della geosfera (o un punto perpendicolare al piano dell'equatore nel suo centro), se accetto la teoria di Newton la mia distanza dal Punto Massa Nord è una circonferenza perchè la mia distanza è costante; in realtà la mia traiettoria continua ad essere quella di prima, cioè una circonferenza all'equatore.
Quando il punto fisso non è sulla perpendicolare alla circonferenza, avremo delle distanze ellittiche, ma la sua traiettoria reale continua ad essere quella circolare dell'equatore.

COMPLANARITA'. Tra le tante cose, il "TEOREMA DEI PIANETI", indica che il punto OR=SOLE non deve essere necessariamente complanare, né dentro il moto (circonferenza) di MN=Pianeta, né essere nel Fuoco dell'ellisse.

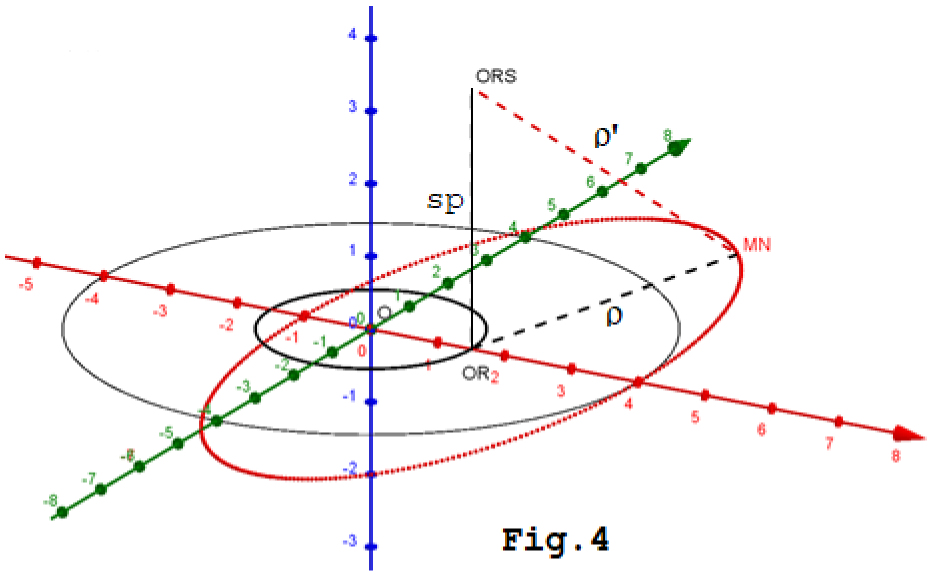


Fig.4

Per la Fig.4 : AP020 APPEND1 IL TEOREMA DEI PIANETI
Infatti, un qualunque punto-fisso nello spazio (esempio ORS di Fig.4) proiettato sul piano di MN, sarà giustappunto OR, dentro o fuori la circonferenza di MN, quindi di valore costante (ORS-OR)=z=sp, piano su cui agirà il Teorema dei Pianeti (ellisse in rosso) come abbiamo visto ed ora indicato in Fig.4 e il cui valore finale darà l'ipotenusa:

$$\rho' = \left(\overline{\mathrm{ORS} - \mathrm{MN}}\right) = \sqrt{(\overline{\mathrm{OR} - \mathrm{MN}})^2 + (\overline{\mathrm{OR} - \mathrm{ORS}})^2} = \sqrt{\rho^2 + \mathrm{sp}^2}$$

che rappresenta una ellisse di raggi ρ incrementati dalla costante sp (distanza ORS-OR), e di semi-assi $a' = \sqrt{a^2 + sp^2}$ e $b' = \sqrt{b^2 + sp^2}$.
Se b=a=R sul piano di MN avrò una circonferenza e nello spazio:
$\rho' = (\overline{ORS - MN}) = \sqrt{R^2 + sp^2}$ raggi di una circonferenza.

Su queste ipotesi poggeranno le Leggi di Newton, che terranno conto delle distanze e della loro interferenza e non della loro complanarità.

VAI SOMMARIO

APPEND.20 PROPRIETA' DEL TEOREMA DEI PIANETI

Dal "TEOREMA DEI PIANETI" (su Google) vediamo alcune delle proprietà che si evincono dal Teorema.

1. La corrispondenza biunivoca tra Circonferenza ed Ellisse e viceversa.
2. Un semplice calcolo dimostra che le distanze tra Sole-Pianeta (nella circonferenza) = Sole-Pianeta (nell'ellisse).
3. Aree uguali sull'Ellisse sono spazzate nello stesso tempo; infatti l'area dell'ellisse data dall'integrale dei valori parametrici è $\frac{ab}{2}E$ abbiamo allora che $\frac{ab}{2}E = \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)E$; $tanE = \frac{b}{a}tan\beta_1 = \frac{a}{b}tan\beta_2$; con beta angolo dell'ellisse, vedi figura, colore verde e marrone.
4. L' area spazzata dal vettore raggio R, in un determinato tempo, cioè la Velocità Areale della Circonferenza, è due volte quella dell'Ellisse relativa (come dettato dalla dinamica).
5. I valori del vettore SP (nella prima figura) sono compresi tra la distanza minima (perielio) e la distanza massima (afelio) con riferimento al Sole.
6. Velocità Angolare doppia sulla circonferenza rispetto alla velocità angolare sull'ellisse.
7. Il perimetro del quadrante della circonferenza di raggio R (prima figura), è uguale al perimetro del quadrante della Ellisse (per R=(q+m)/2), risolvendo l'esempio empirico: *«Se prendo un anello (di metallo e di raggio R) e lo stringo su due poli, l'anello si allarga assumendo la forma di una ellisse e più stringo più si allarga e notiamo che l'area originale della circonferenza tende a zero se continuiamo a stringere, mentre il suo perimetro rimane sempre uguale a quello dell'anello iniziale».*

(come vedremo in "APPEND 7 IL VALORE GEOMETRICODELL'INTEGRALE ELITTICO")

VAI SOMMARIO

APPEND.25 DISTANZA DI DUE PUNTI

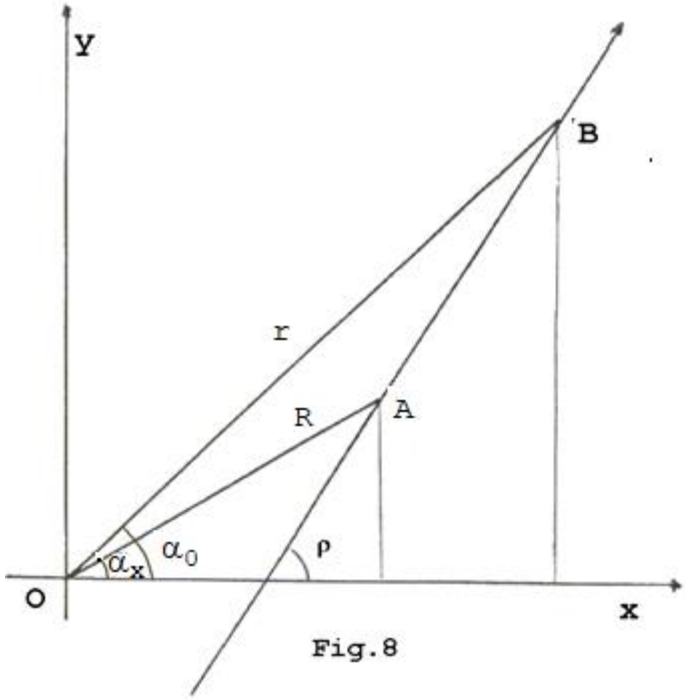


Fig.8

Dati due punti $B(x_0;y_0;\alpha_0)$ e $A(x;y;\alpha_x)$ della retta (ρ come da figura, e la distanza del punto B da A avremo:

$$\overline{AB} = \overline{OA}\cos(\rho-\alpha_x) - \overline{OB}\cos(\rho-\alpha_0) =$$
$$= (\overline{OA}\cos\alpha_x - \overline{OB}\cos\alpha_0)\cos\rho +$$
$$+ (\overline{OA}sen\alpha_x - \overline{OB}sen\alpha_0)sen\rho =$$
$$= (x-x_0)\cos\rho + (y-y_0)sen\rho$$

$$\begin{cases} \overline{AB}\cos\rho = OA\cos\alpha_x - OB\cos\alpha_0 = X \\ \overline{AB}\sin\rho = OA\sin\alpha_x - OB\sin\alpha_0 = Y \end{cases}$$

$$\tan\rho = \frac{Y}{X}$$

L’espressione ora vista darà un valore positivo o negativo a seconda se facciamo

$(x-x_0);(y-y_0);\ \tan\rho = \dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ oppure $(x_0-x);(y_0-y);\ \tan\rho = \dfrac{y_0-y}{x_0-x}$

Facendo:

$$\overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 = (R\cos\alpha_x - r\cos\alpha_0)^2 + (R\sin\alpha_x - r\sin\alpha_0)^2 =$$
$$= R^2 + r^2 - 2Rr(\cos\alpha_x\cos\alpha_0 + \sin\alpha_x\sin\alpha_0) = R^2 + r^2 - 2Rr\ \cos(\alpha_x-\alpha_0) =$$
$$= R^2 + r^2 - 2Rr\ \cos\alpha \quad per \quad |\alpha| = (\alpha_x - \alpha_0) \quad (velocità\ angolare)$$

quadrando e svolgendo l’ultima espressione si ottiene il segmento di ellisse:

$$\overline{AB}^2 = (R-r)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + (R+r)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

per (R-r)=**m**=asse min.; (R+r)=**q**=asse mag. e $\tan\rho = \frac{m}{q}\tan\frac{\alpha}{2}$.

Se α_0=0 (cioè punto B sull’ascissa), allora

AB= OA cos(ρ-α_x)- OB cos(ρ).

VAI SOMMARIO

APPEND.30 AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

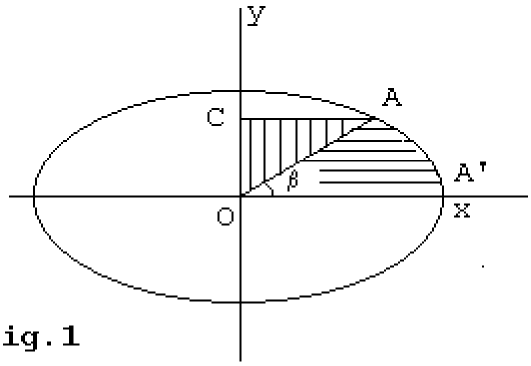


Fig.1

I°) Sia $S(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$ l'area OCAA'.

La funzione S(x) deve essere tale poiché è $S(x)=\frac{1}{2}xy+\text{area settore OAA'}$ e l'arco
A' è tale che il suo coseno vale $\frac{x}{q}$ avremo $\frac{\text{Area settore OAA'}}{S}=\frac{arc\cos\frac{x}{q}}{\frac{\pi}{2}}$

e quindi $S(x)=\frac{1}{2}x\frac{m}{q}\sqrt{q^2-x^2}+\frac{2S}{\pi}arc\cos\frac{x}{q}$ espressione che derivata e semplificata darà la Funzione primitiva:

$$S(x)=\frac{m}{q}\left(\frac{x\sqrt{q^2-x^2}}{2}+\frac{q^2}{2}arc\cos\frac{x}{q}\right)=OCAA'$$

che per x = q cosα; y = m senα diventa:

$$S(x)=OCA+OAA'=\frac{qm}{2}(\cos\alpha sen\alpha+arc\cos\cos\alpha)$$

da cui: $S(x)_{(OAA')}=\frac{qm}{2}arc\cos\cos\alpha=\frac{qm}{2}\frac{\alpha^o\pi}{180}=\frac{qm}{2}a^R$ (α in rad)

II°) INTEGRALE DI VAG. In modo più rigoroso possiamo calcolare l'integrale (per parti) delle uguaglianze parametriche

$x=q\cos\alpha;\ y=m sen\alpha;\quad y'=m\cos\alpha$

$$S(x)_{(OCAA')}=\int q\cos\alpha\, m(\cos\alpha)\,d\alpha=qm\int\cos^2\alpha\,d\alpha=qm\int\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\,d\alpha=$$

$$=qm\left[\int\frac{d\alpha}{2}+\int\frac{\cos2\alpha\ d\alpha}{2}\right]=qm\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{sen2\alpha}{4}\right)=\frac{qm}{2}\alpha+\frac{q\cos\alpha\ \ msen\alpha}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ll}\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha); & \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha);\\ 2\alpha=t\quad d\alpha=\frac{1}{2}dt; & \int\frac{\cos t}{2}dt=\frac{1}{2}sent=\frac{1}{2}\ sen2\alpha\end{array}\right)$$

l'ultimo membro dell'espressione S è l'area OCA per cui avremo in radianti l'area

$S(x)_{OAA'}=\frac{mq}{2}\alpha$ (Esempi numerici più avanti)

Come si vede l'area dell'Ellisse dipende dall'angolo α legato all'Ellisse dalla relazione: $\tan\beta=\frac{m}{q}\tan\alpha$

M.Vaglieco VAI SOMMARIO

APPEND.40 AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

Essendo l'angolo α in radianti, da ciò che abbiamo visto l'area di un settore dell'Ellisse e':

$$S = \frac{qm}{2} arccos(\cos\alpha) = \frac{qm}{2}\alpha$$

$$\text{dove} \quad \text{per } \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad S = \frac{qm}{2}\frac{\pi}{2} \text{ area quadrante Ellisse}$$

Se sostituiamo q = R + r e m =R - r(sistema algebrico in cui dati due valori R e r ha soluzione per 2R=q+m e 2r=q-m), l'area del settore dell'Ellisse sarà:

$$S = \frac{qm}{2}\alpha = \frac{R^2 - r^2}{2}\alpha$$

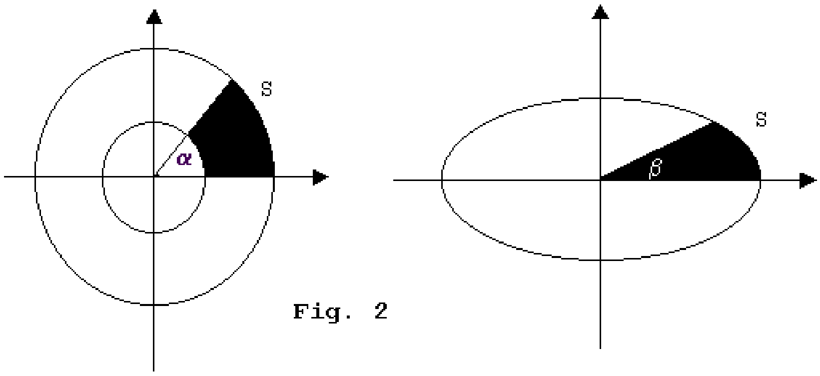


Fig. 2

Poichè α e' l'angolo delle circonferenze R ed r (Cap. V° ELLISSE-Geometria Parametrica su Google), quest'ultima formula oltre che a rappresentare l'area di un settore dell'Ellisse rappresenta anche l'area di un settore della corona circolare di ampiezza (R-r) di uguale valore:

L'area di un settore di Ellisse di angolo β e' uguale all'area di un settore di corona circolare di angolo α corrispondente a β mediante la formula $\alpha = arc\tan(\frac{q}{m}\tan\beta)$.

Possiamo anche aggiungere che l'area di un settore di Ellisse è proporzionale all'angolo che forma l'area del settore della corona circolare $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{qm}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} = \text{costante}$. Si tenga presente che l'angolo dell'area del settore dell'Ellisse va preso iniziando da zero, cioè dall'asse delle ascisse con movimento antiorario.

VAI SOMMARIO

APPEND.50 PROPRIETA' DELLE AREE DELL'ELLISSE

Il valore in radianti che compare nella formula dell'Area $=\frac{mq}{2}=\alpha^R$ in Astronomia è indicata come Anomalia Eccentrica $(E=\alpha)$. Nella Fig.5 l'Area:

$$\text{S'SX} = \text{S'OX} - \text{SOX} = \frac{mq}{2}E - \frac{OS\, m\, \sin E}{2} = \frac{mq}{2}\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right).$$

L'ultima espressione della formula è chiamata *Anomalia Media* ed indicata con M.

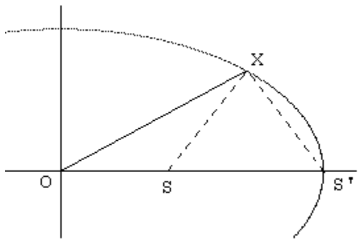


Fig. 5

L'espressione $M=(E-\frac{OS}{q}\sin E)$ determina l'area di un qualunque settore di ellisse; infatti ogni punto dell'ellisse è determinato dall'angolo parametrico E mentre la posizione del punto S lungo l'ascissa ne determina l'area (vedi Fig.5).

per $OS=0$ avremo $S_x=\frac{mq}{2}E$ area $\text{OS}'\widehat{\text{X}}\text{O}$

per $OS<q$ avremo $S_x=\frac{mq}{2}(E-\frac{OS'}{q}\sin \text{E})$ area $\text{SS}'\widehat{\text{X}}\text{S}$

per $OS=q$ avremo $S_x=\frac{mq}{2}(E-\sin E)$ area $\text{S}'\widehat{\text{X}}\text{S}'$

Dato il rapporto $\frac{OS}{q}=\varepsilon$ potremo scrivere per qualsivoglia area

$$S_x=\frac{mq}{2}(E-\varepsilon \sin E)=\frac{mq}{2}M \;.$$

VAI SOMMARIO

APPEND.60 LUNGHEZZA DELL'ARCO D'ELLISSE RETTIFICAZIONE

Calcoliamo l'integrale ellittico con valori parametrici:
siano i generici assi **q>m** di una ellisse con **m** sull'ascissa:

$$\rho=\sqrt{m^2\cos^2\alpha+q^2\sin^2\alpha}\qquad \begin{cases} OA\cos\beta=x=m\cos\alpha=(R-r)\cos\alpha \\ OA\sin\beta=y=q\sin\alpha=(R+r)\sin\alpha \end{cases}\qquad \tan\beta=\frac{y}{x}=\frac{q}{m}\tan\alpha;$$

$$f'x=\frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}=q\cos\alpha\frac{1}{-m\sin\alpha}=-\frac{q}{m}\frac{1}{\tan\alpha};\qquad \frac{dx}{d\alpha}=-m\sin\alpha;$$

e con la formula di rettificazione $\frac{ds}{dx}=\left(\sqrt{1+(f'x)^2}\right)$ si ottiene:

$$ds=\left[\sqrt{1+\left(-\frac{q}{m}\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right)^2}\,d\alpha(-m\sin\alpha)\right]=\left[\sqrt{\frac{m^2sen^2\alpha+q^2\cos^2\alpha}{m^2sen^2\alpha}(-m\sin\alpha)^2}\right]d\alpha$$

$\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{m^2sen^2\alpha+q^2\cos^2\alpha}$ che sviluppata in sinα scrive la
Formula di rettificazione rappresentante l'Integrale ellittico di 2ª specie nella sua forma classica: $s=q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$

OSSERVAZIONE: Se fossimo partiti con l'ellisse avente l'asse-maggiore **q** sull' ascissa:

$$\rho=\sqrt{q^2\cos^2\alpha+m^2\sin^2\alpha}\qquad \begin{cases} OA\cos\beta=x=q\cos\alpha=(R+r)\cos\alpha \\ OA\sin\beta=y=m\sin\alpha=(R-r)\sin\alpha \end{cases}$$

e con la stessa rettificazione vista: $\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{q^2sen^2\alpha+m^2\cos^2\alpha}$

che sviluppata in cosα diventa $s=q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}\,d\alpha$: equivalente alla precedente per $s=q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2(90°+\alpha)}\,d\alpha$ cioè ruotato di 90° (asse minore sull'ascissa).

Valore geometrico dell'integrale ellittico: ricordiamo che dalla Geometria Parametrica - CAP.III "LE CURVE" sappiamo che

$\overline{FA}=(q-c\cos\alpha)=q(1-e\cos\alpha)$ e $\overline{F'A}=(q+c\cos\alpha)=q(1+e\cos\alpha)$

e $\overline{FA}=(q-c\sin\alpha)=q(1-e\sin\alpha)$ e $\overline{F'A}=(q+c\sin\alpha)=q(1+e\sin\alpha)$

dove FA e F'A sono la distanza di un punto A di ellisse dai due FUOCHI dell'ellisse, la cui somma è:

$\overline{FA}+\overline{F'A}=2q$ e il loro prodotto è giusto:

$\overline{FA}\times\overline{F'A}=q^2(1-e^2\cos^2\alpha)$ (oppure $\overline{FA}\times\overline{F'A}=q^2(1-e^2\sin^2\alpha)$)

che riconduce il tutto a $s=q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\alpha}\,d\alpha$ o $s=q\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,d\alpha$

VAI SOMMARIO

APPEND.70 IL VALORE GEOMETRICO DELL'INTEGRALE ELLITTICO

Cerchiamo il perimetro dell'ellisse geometricamente, prendendo in considerazione quanto detto nel Capitolo visto precedentemente APPEND.2 PROPRIETA DEL TEOREMA DEI PIANETI con l'esempio empirico indicato al punto 7 (comprimendo una circonferenza si ha una ellisse).

Dalla corrispondenza tra ellisse e relativa circonferenza data dal "Teorema dei Pianeti" (vedi su Google pdf o Geo) possiamo sintetizzare il sistema di primo grado a due incognite:

$$\begin{cases}(R+r)=q\\(R-r)=m\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}2R=(R+r)+(R-r)=(q+m)\\2r=(R+r)-(R-r)=(q-m)\end{cases} \qquad 4Rr=(q^2-m^2)=c^2 \quad \textbf{1)}$$

c=distanza Focale, R e r raggi di circonferenza e q>m semi assi dell'ellisse corrispondente coma abbiamo in Fig.9b.

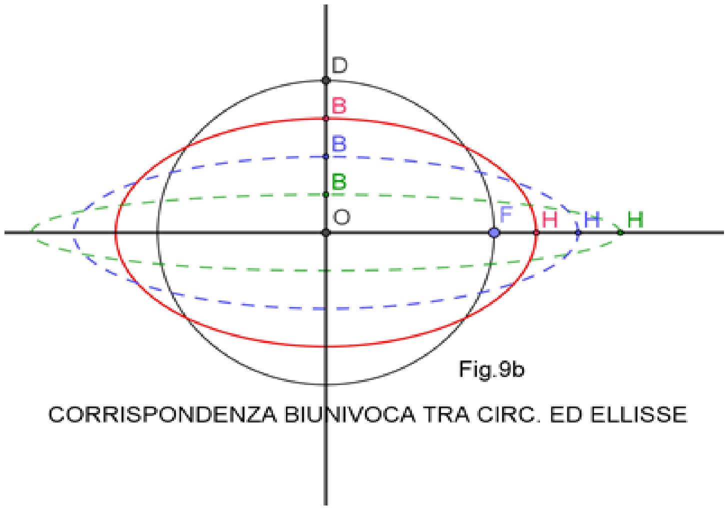


Fig.9b

CORRISPONDENZA BIUNIVOCA TRA CIRC. ED ELLISSE

OD=OF=R=(q+m)/2
BD=FH=r=(q-m)/2
OH=(R+r)=q=Asse Maggiore
OB=(R-r)=m=Asse Minore

Si osservi che per R costante (= un anello compresso) il Perimetro dovrà essere sempre

$2R\pi=(q_x+m_x)\pi$

si forma così una famiglia di ellissi di **uguale perimetro**.

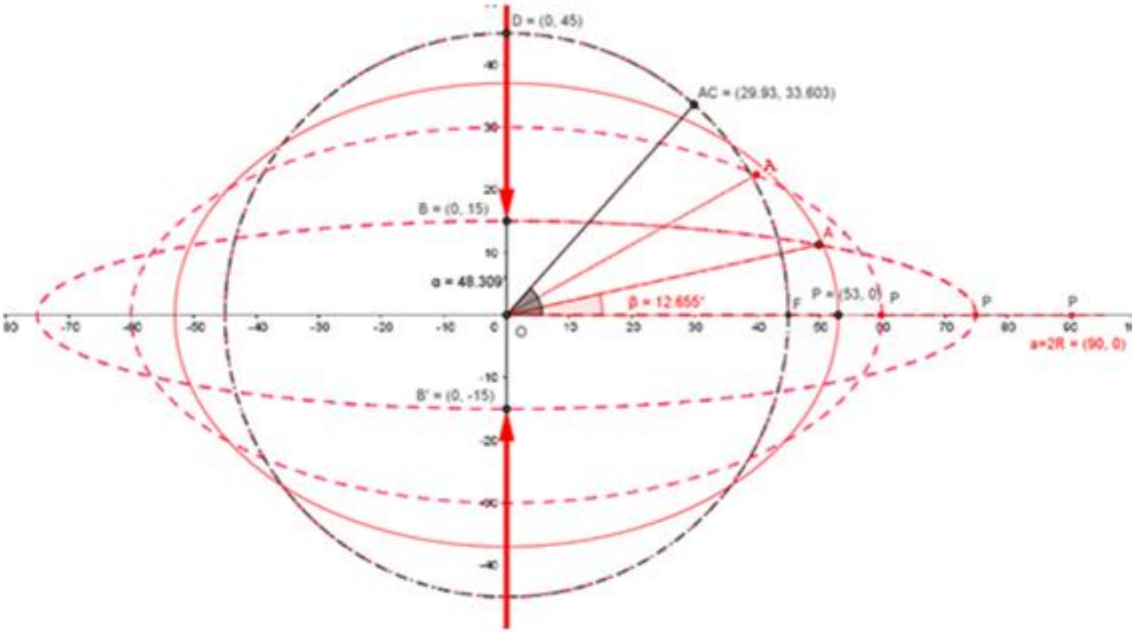
Comprimendo la circonferenza ai poli, al cerchio di raggio R corrisponderà una serie di ellissi con la somma degli assi costante:

2R = (q + m) = [(q + μ) + (m - μ)]   per $\mu \in (0,m)$

(q + μ)=asse maggiore;   (m - μ)=asse minore

$$2R=\sum_{\mu=0}^{b}[q+\mu]+[m-\mu]=(q+m) \quad \text{e con} \quad \begin{cases}\mu=0\\ \mu=m\end{cases} \quad \frac{[q]+[m]}{[q+m]+[m-m]}=(q+m)$$

Dall'applet: AP070 PERIMETRO ELLISSE E CERCHIO ricaviamo il grafico a seguire e analizziamolo.



Dalla l'ellisse (in ROSSO) di partenza, di assi (q=53 e m=37) si ottiene la circonferenza di raggio (q+m)=2R (in NERO) che stretta ai poli descrive le ellissi indicate (in rosso a tratti).

Ad un Punto A della ellisse in rosso, di angolo β, esiste nella circonferenza il corrispettivo punto A_C di angolo α (in nero), legate da $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$; ma nelle ellissi date dallo schiacciamento, ai suoi vari punti A di angolo (β), corrisponde sempre lo stesso punto A_C di angolo (α) eguale e costante per tutti i punti corrispondenti su ciascuna ellissi; giusto a mostrare la corrispondenza che esiste tra tutte le ellissi e la circonferenza, data dalla formula

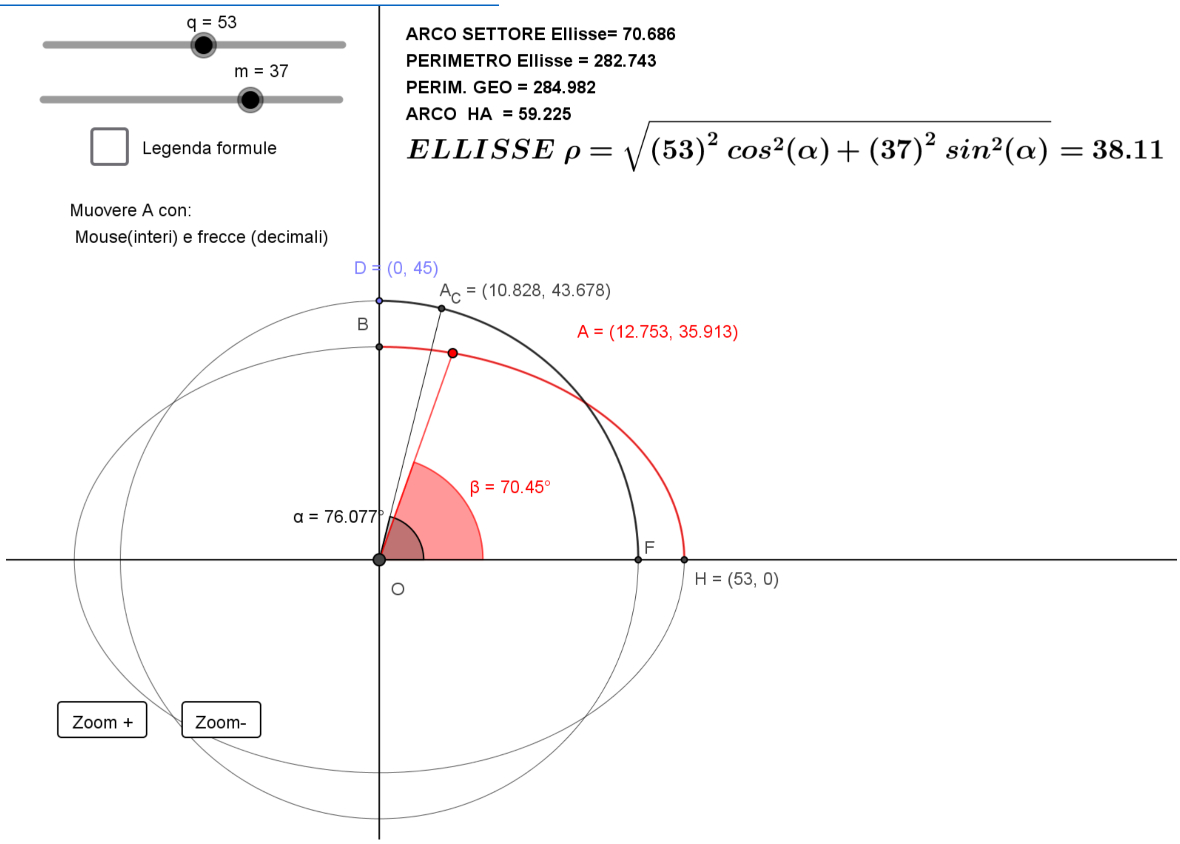
$$\frac{A_y}{A_x} = tan(\beta) = \frac{(m-\mu)}{(q+\mu)} tan(\alpha)$$

dove $\mu \in (0, \mathrm{m})$ è l'incremento; e al variare del rapporto la $\tan(\alpha)$ rimane costante ma varia $\tan(\beta)$ (vedi applet).
Se invece muoviamo il punto A sull'arco dell'ellisse, anche il punto A_C si muoverà, coincidendo con A solo per β=0 o β=90°;il che vuol dire che gli archi intermedi non sono uguali.
Per μ=m allo schiacciamento totale, si ha il risultato di 2R=(q+μ)+(m−μ)=(q+m)+(0) e nell'applet il valore 2R=(53+37)+(0)=90 quindi R=45.

Ora invece dal Capitolo visto: PROPRIETA del "TEOREMA DEI PIANETI" al punto 1], dove stabilisce la corrispondenza tra ellisse e circonferenza, abbiamo uguali il perimetro dei rispettivi quadranti per:

$$R\frac{\pi}{2} = \frac{(q+m)}{2}\ \frac{\pi}{2}$$

avendo tutte le ellissi il valore del perimetro della circonferenza.
Ma vediamo quali sono i valori degli archi corrispondenti dall'applet:
AP071 ARCO ELLISSE E CERCHIO



Nel primo quadrante, per l'esempio empirico mostrato, i vari archi determinati dal punto A dell'ellisse sono corrispondenti agli archi del punto A_C sulla circonferenza, ma *diversi* in valore ed uguali solo, come visto per β=0 e β=90°.
Il rapporto che lega l'angolo β dell'ellisse e l'angolo α della circonferenza è dato sempre dalla eguaglianza $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$,
mentre l'arco dell'ellisse corrispondente all'arco del cerchio, non eguale per valore, è determinato da una relazione che (per una ellisse con asse-maggiore **q** posto sull'ascissa) è dato dalla formula di rettificazione dell'integrale ellittico:
che possiamo indicare nelle sue varie forme:

$$HA = \left[\frac{\sqrt{q^2 - c^2\, cos^2\,\alpha}}{2} + \frac{\sqrt{m^2 + c^2\, cos^2\,\alpha}}{2}\right]\beta^R \qquad c^2 = q^2 - m^2$$

$$HA = \left[\frac{\sqrt{q^2 \sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}}{2} + \frac{\sqrt{m^2 \sin^2\alpha + q^2\cos^2\alpha}}{2}\right]\beta^R$$

e per il "Teorema dei Pianeti" (R+r)=q e(R-r)=m, anche:

$$HA = \left[\frac{\sqrt{(R+r)^2 \sin^2\alpha + (R-r)^2\cos^2\alpha}}{2} + \frac{\sqrt{(R+r)^2 \cos^2\alpha + (R-r)^2\sin^2\alpha}}{2}\right]\beta^R$$

$$HA = \left[\frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(2\alpha)}}{2} + \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos(2\alpha)}}{2}\right]\beta^R$$

Riassumiamo!
a) l'area dell'ellisse e' uguale all'area della corona circolare data dalle due circonferenze;
b) la relazione che lega l'angolo dell'ellissi e delle circonferenze e' data da $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha = \frac{R-r}{R+r}\tan\alpha$
c) mediante l'angolo α della circonferenza e' possibile calcolare il perimetro dell'ellisse e il relativo angolo β (o viceversa), sapendo che il perimetro del quadrante dell'ellissi sono uguali a quello della circonferenza maggiore, come visto nell'Applet:

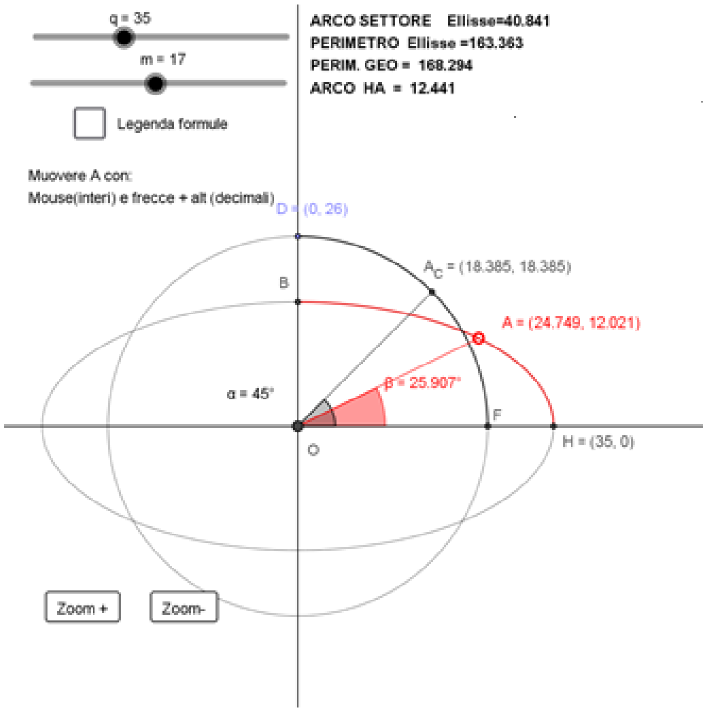
$$\left(R\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{q+m}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \left(\frac{(q+\mu)}{2} + \frac{(m-\mu)}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

d) gli archi dell'Ellisse e della Circonferenza sono uguali solo per α=π/2 (per settori), non per valori di archi intermedi.

VAI SOMMARIO

ESEMPIO4: ARCO DI ELLISSE

Vediamolo con Geogebra nel programma: AP071 ARCO ELLISSE E CERCHIO



Sia una Ellisse di assi (q = 35; m = 17) e per $\tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$, si voglia l'arco di ellisse di angolo:

$$\beta: \in (25{,}907°, 90°)$$

arco AB della figura con

$$\alpha: \in (45°, 90°)$$

$$\tan\beta = \tan 25{,}907 = \frac{17}{35}\tan 45° = $$
$$= 0{,}485714286$$

Dobbiamo allora calcolare il valore dell’arco HA, per $\beta \in (0°, 90°)$ corrispondente ad $\alpha \in (45°, 90°)$ che darà

$$Arco\ HA = \left[\frac{\sqrt{35^2 0{,}5 + 17^2 0{,}5}}{2} + \frac{\sqrt{17^2 0{,}5 + 35^2 0{,}5}}{2}\right]\frac{25{,}907°\,\pi}{180°} = 12{,}441$$

mentre per: $\beta: \in (0°, 90°)$ e $\alpha: \in (0°, 90°)$ avremo **Arco Settore=40,841**

L'arco richiest0 per $\beta: \in (25{,}907°, 90°)$ e $\alpha: \in (45°, 90°)$ sarà:

Arco Ellisse AB=40,841-12,441= 28,400

Raccogliamo:

Angolo circonferenza	Angolo Ellisse	Area Ell. e cor.Circolare	Arco Ellisse	Arco Circ. R= (q+m)/2
α	β			
0° ----> 45°	0°---> 25,907	233,65595	12,441	20,4205
45°----> 90°	25,90--> 90°	233,65595	28,400	"
0° ----> 90°	0°----> 90°	467,31191	40,841	40,8410

E’ possibile calcolare l’arco di una qualunque ellisse utilizzando il programma precedentemente indicato.

VAI SOMMARIO

I PROGRAMMI + APPENDICE

TITOLO	LINK
AP010 CAP.I	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP010%20CAP.I%20 LONGITUDINE%20ELLISSE
AP020 APPEND1	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP020%20APPEND1%20IL%20TEOREMA%20DEI%20PIANETI
AP023 CAP.II	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP023%20CAP.II%20DISTANZA%20DI%20DUE%20PUNTI%20FIG1A
AP025 CAP.II	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP025%20CAP.II%20DISTANZA%20TRA%20PIANETI%20E%20SATELLITI%20FIG.2A
AP050 CAP.III	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP050%20CAP.III%20MOTO%20DI%20RIVOLUZIONE
AP070 PERIM	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP070%20PERIMETRO%20ELLISSI%20E%20CERCHIO
AP071 ARCO	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP071%20ARCO%20ELLISSE%20E%20CERCHIO
AP100 CAP.X	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP100%20CAP.X%20EQ%20PARAB%20PARAMETRICA
AP109 CAP.XI	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP109%20CAP.XI%20%20TRAIETTORIA%20PARABOLA
AP110 CAP.XI	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP110%20CAP.XI%20TRAIETTORIA%20DI%20UN%20SATELLITE
AP111 CAP.XI	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP111%20CAP.XI%20IPERBOLE%20FUOCO
AP112 CAP.XI	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP112%20CAP.XI%20MOTO%20VERTICALE%20GEOGE
AP120 CAP.XII	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP120%20CAP.XII%20MOTO%20TRAMITE%20ALZO
AP160 CAP.XV	https://www.geometriaparametrica.it/GeoGebra?file=AP160%20CAP.XV%20%20RELATIVITA%20EINSTEIN
CAPXIII Geo	
CAP.XIV GeoFg.3	
CAP.XIV GeoFg.2	
CAP.XIV Geogebra Fig.5	
CAP.XV Geog	

VAI SOMMARIO