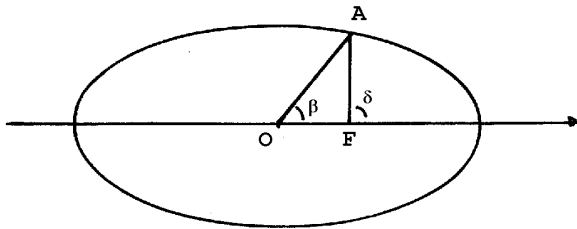


#### **IV. L'EQ. DI VAG MEDIANTE EQ. POLARE**

Essendo nella Eq. di Vag il valore  $|\overline{OA}|$  (dall'origine ad un punto, ed in generale tra punto e punto) un valore assoluto, non ha nessuna importanza di come esso sia ricavato ed ottenuto.

Pertanto si vuol far vedere, che tale valore e' valido anche se calcolato con una equazione polare.

### ELLISSE



A) Posto il polo nel centro dell'Ellisse e preso come asse polare l'asse maggiore orientato verso destra:

$$\rho^2 = \overline{OA}^2 = \frac{m^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta}$$

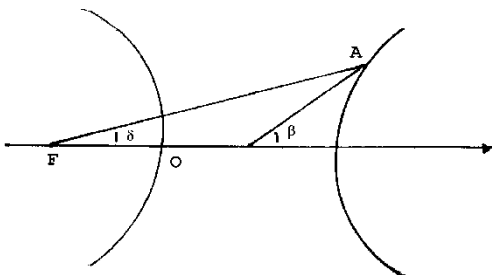
B) Posto invece il polo nel Fuoco a destra (punto F):

$$\rho = \overline{FA} = \frac{m^2}{q(1 + e \cos \delta)}$$

Si ricordi (Cap.III-Le Curve-Ellisse(Fuoco)-pag.3) che se il punto F non è il fuoco l'Eq. Polare assume l'espressione:

$$\rho = \overline{FA} = \frac{q^2 - c^2}{q(1 + \frac{c}{q} \cos \delta)}$$

### IPERBOLE



A) Posto il polo nel centro dell'Iperbole e preso come asse polare l'asse trasverso orientato a destra:

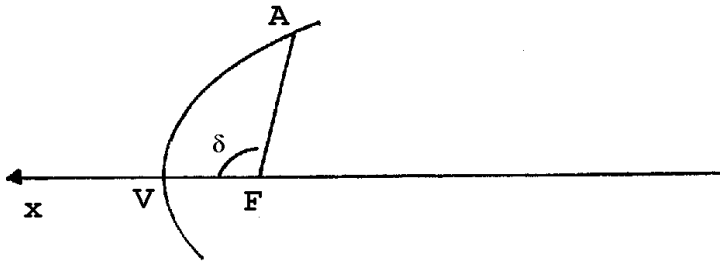
$$\rho^2 = \overline{OA}^2 = \frac{m^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta}$$

B) Posto il polo nel fuoco a sinistra:

$$\rho = \overline{FA} = \frac{m^2}{q(1 + e \cos \delta)}$$

## PARABOLA

Posto il polo nel fuoco e preso come asse polare l'asse di simmetria con orientamento opposto a quello dell'asse x.



$$\rho = \overline{FA} = \frac{p}{(1 + \cos \delta)}$$

Tale formula l'abbiamo incontrata trattando della parabola.

## ESEMPIO

Che il valore  $\overline{OA}^2$  dell'Eq. Di Vag valga  $\rho^2$  dell'eq. polare lo vediamo:

$$\begin{aligned} m^2 &= m^2 \sin^2 \alpha + m^2 \cos^2 \alpha + q^2 \cos^2 \alpha - q^2 \cos^2 \alpha \\ &= (q^2 \cos^2 \alpha + m^2 \sin^2 \alpha) + m^2 \cos^2 \alpha - q^2 \cos^2 \alpha = \overline{OA}^2 - (q^2 - m^2) \cos^2 \alpha = \\ &= \overline{OA}^2 - \left(\frac{q^2 c^2}{q^2}\right) \cos^2 \alpha = \overline{OA}^2 - e^2 \overline{OA}^2 \cos^2 \beta; \quad \overline{OA}^2 = \frac{m^2}{1 - e^2 \cos^2 \beta} \end{aligned}$$

Nel caso B) dell'ELLISSE con F=Fuoco abbiamo che:

$$*) \quad \rho = \overline{FA} = \frac{m^2}{q(1 + e \cos \delta)}$$

mentre nel caso dell'Ellisse in cui l'origine e' nel Fuoco abbiamo visto essere  $\overline{FA} = (q - c \cos \alpha) = q(1 - e \cos \alpha)$  ( Cap.III ).

Sviluppiamo la \*):  $\overline{FA} + e \overline{FA} \cos \delta = \frac{m^2}{q}$  1]

ma  $\overline{FA} \cos \delta = (q \cos \alpha - c)$  (Cap.III) sostituendo  $\overline{FA} \cos \delta$  nella \*):

$$\overline{FA} + e(q \cos \alpha - c) = \overline{FA} + c \cos \alpha - \frac{c^2}{q} = \frac{m^2}{q}$$

$$\begin{aligned} \overline{FA} &= \frac{c^2}{q} + \frac{m^2}{q} - c \cos \alpha = \frac{q^2 - m^2 + m^2}{q} - c \cos \alpha = \\ &= (q - c \cos \alpha) = q(1 - e \cos \alpha) \end{aligned}$$

Pertanto avro':

$$\begin{cases} \rho \cos \delta = \frac{m^2}{q(1+e \cos \delta)} \cos \delta = \overline{FA} \cos \delta = (q \cos \alpha - c) = x \\ \rho \sin \delta = \frac{m^2}{q(1+e \cos \delta)} \sin \delta = \overline{FA} \sin \delta = m \sin \alpha = y \\ \tan \delta = \frac{m \sin \alpha}{q \cos \alpha - c} = \frac{m}{q} \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha - e)} \end{cases}$$

L'Eq. di Vag per esteso di una Ellisse e':

$$\frac{m^2}{q(1 + e \cos \delta)} = q(1 - e \cos \alpha) = (q \cos \alpha - c) \cos \delta + m \sin \alpha \sin \delta$$

dove il primo membro e' come equazione polare.

Si osservi che da  $\sin \delta (q \cos \alpha - c) = \cos \delta m \sin \alpha$  considerando  $\delta = 90^\circ$  (cioè FA

perpendicolare all'asse x) si ha  $\cos \alpha = \frac{c}{q} = e$  cioè i valori di cos

$\alpha$  e l'eccentricità dell'ellisse coincidono.

Dal fatto che  $\overline{FA} = q(1 - e \cos \alpha)$  per  $\delta = 90^\circ$  si avrà che :

$$\overline{FA} = q(1 - e^2) = \frac{m^2}{q}$$

Per  $\delta = 0$  si vede che anche  $\alpha = 0$  ed FA avrà il valore :

$$\overline{FA} = (q-c) = q(1-e)$$

Analogamente per l'IPERBOLE caso B) si avrà eguaglianza tra eq. Polare ed Eq. di Vag:

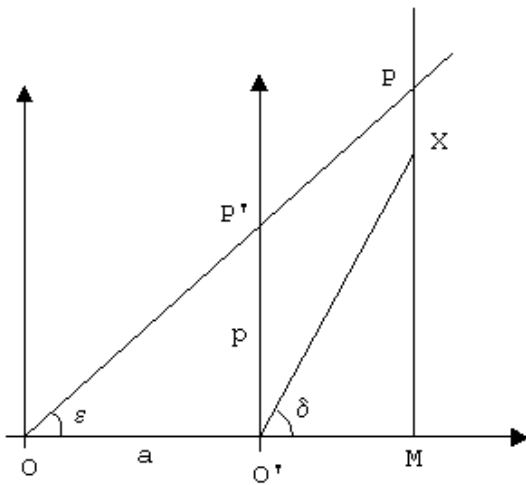
$$\overline{FA} = \frac{m^2}{q(1+e\cos\delta)} = q(1-e\cos\alpha) \qquad \overline{FA} + \overline{FA}e\cos\delta = \frac{m^2}{q}$$

Per  $\delta = 90^\circ$   $\cos\delta = 0$  avremo  $\overline{FA} = \frac{m^2}{q} = \frac{c^2 - q^2}{q} = q(e^2 - 1)$

Dalla  $\tan\delta = \frac{m\sin\alpha}{q(1-e\cos\alpha)}$  si ha  $\sin\delta q(1-e\cos\alpha) = m\sin\alpha\cos\delta$  che per  $\delta=90^\circ$

$\cos\delta=0$  darà  $\cos\alpha = \frac{1}{e}$  (l'inverso del valore della ELLISSE)

EQ. POLARE DELLE CURVE NOTE



Dai dati in figura accanto si voglia il luogo geometrico dei punti dati dal rapporto  $\frac{\overline{O'X}}{\overline{OM}} = \tan \varepsilon$  ( $\varepsilon$  costante e compreso tra  $0^\circ < \varepsilon < 90^\circ$ ). Da un punto X interno alla semiretta di angolo dato  $\varepsilon$ , e l'ascissa  $OO'$  è tracciato un segmento perpendicolare ad essa che determina i punti P ed M. Dalla figura deduciamo l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} \overline{OP} \cos \varepsilon = a + \overline{O'X} \cos \delta = \overline{OM} & \frac{\overline{MP}}{\overline{OM}} = \tan \varepsilon \\ \overline{OP} \sin \varepsilon = \overline{O'X} \sin \delta = \overline{MP} & \end{cases} \quad 1]$$

il che vuol dire  $\overline{O'X} = \overline{MP} \quad 2]$

Pertanto dalla 1]:  $\tan \varepsilon = \frac{\overline{O'X}}{a + \overline{O'X} \cos \delta} \quad \overline{O'X} = a \tan \varepsilon + \overline{O'X} \tan \varepsilon \cos \delta$

$$\overline{O'X} = \frac{a \tan \varepsilon}{1 - \tan \varepsilon \cos \delta} \quad 3]$$

In quest'ultima espressione fatto  $\tan \varepsilon = e$  (eccentricità) cioè  $\tan \varepsilon = e = \frac{p}{a}$  perveniamo all'Eq. Polare Classica che fornisce i valori delle distanze:

$$\overline{O'X} = \frac{ea}{1 - e \cos \delta} = \frac{p}{1 - e \cos \delta} \quad 3bis]$$

mentre la sua posizione è data dall' Eq. Di Vag:

$$\begin{cases} \overline{XO'} \cos \delta = \frac{p}{1 - e \cos \delta} \cos \delta = x \\ \overline{XO'} \sin \delta = \frac{p}{1 - e \cos \delta} \sin \delta = y \end{cases} \quad \text{Il fatto che il denominatore della 3bis]$$

abbia segno negativo anziché positivo come nella Eq.Pol.Class. è senza rilevanza essendo condizionato dal segno di coseno.

La 3bis] come Eq.Polare classica rappresenta:

$0 < \varepsilon < 45^\circ$	$e < 1$	Ellisse
$\varepsilon = 45^\circ$	$e = 1$	Parabola
$\varepsilon > 45^\circ$	$e > 1$	Iperbole
$\varepsilon = 0^\circ$	$e=0$	Con $p \neq 0$ una Circonferenza di raggio $p$ in quanto avviene una trasformazione di coordinate: $OP'$ coincide con $a$ e $O'X$ con $O'M$
$p$		Parametro Focale: $e$ in quanto segmento rappresenta un Valore Assoluto

Sviluppiamo la 3bis]:

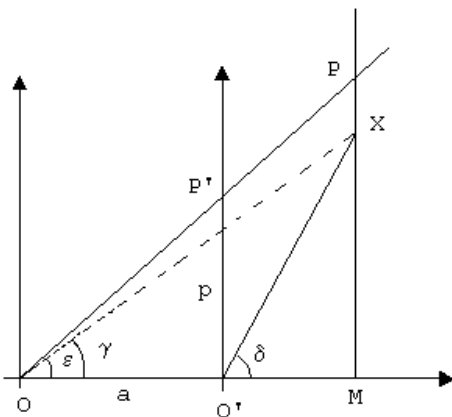
$$O'X = \frac{ea}{1 - e \cos \delta} = \frac{a \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta} = \frac{a}{\cot \varepsilon - \cos \delta} \quad 4]$$

$$O'X = \frac{p}{1 - e \cos \delta} = \frac{p \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta} = \frac{p}{1 - \tan \varepsilon \cos \delta} \quad 5]$$

Si osservino i seguenti passaggi:  $\overline{O'X} = \overline{MP} = \overline{OP} \sin \varepsilon$  che

confrontata con la 4] darà il valore in 1] di:  $\overline{OP} = \frac{a}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta}$

Prendiamo in considerazione il segmento  $OX$  che formerà un angolo  $\gamma$  con l'asse dell'ascissa (come in figura), dando luogo alla Eq. di Vag:



$$\begin{cases} \overline{OX} \cos \gamma = OM = OP \cos \varepsilon = \frac{a \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta} = X_v \\ \overline{OX} \sin \gamma = MX = O'X \sin \delta = \frac{a \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \delta} \sin \delta = Y_v \end{cases} \quad 6]$$

$$\tan \gamma = \tan \varepsilon \sin \delta$$

(poiché  $\gamma < \delta$  è sempre  $\frac{\tan \gamma}{\tan \delta} < 1$ )

Sviluppando i valori di  $X_v$  e  $y_v$  si perviene dopo semplici passaggi:

$$X_v = \frac{p}{1 - e \cos \delta} \cdot \frac{1}{e} \quad Y_v = \frac{p}{1 - e \cos \delta} \cdot \sin \delta \quad 7]$$

La 6] ci dice che la 7] ha coordinate date dalla Eq. Polare Classica come in 3bis] la cui distanza è moltiplicata per  $\cot \varepsilon$  anziché per  $\cos \delta$  e per  $\sin \delta$  in quanto costruita dal punto  $O$  anziché dal punto  $O'$ , fuoco della figura.

Considerazioni sugli angoli. Poiché abbiamo visto essere  $O'X=MP$  per definizione con  $0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$  si deduce che il punto  $X$  è sempre interno alle semirette  $OP$  e  $OM$ . Infatti se fosse  $X$  in  $P$  o al disopra

di P il triangolo  $O'PM$  avrebbe che la sua ipotenusa sarebbe uguale al cateto  $MP$ .

Per  $\delta=90^\circ$  si ha  $X=0$ , cioè una trasformazione di coordinate per cui  $MP$  viene a coincidere con  $O'P'$ . Per valori di  $90^\circ < \delta \leq 180^\circ$  il punto tornerebbe ad essere compreso nel triangolo  $OO'P'$ .

E' importante notare che, come conseguenza, l'angolo  $\gamma$  sarà compreso tra  $0^\circ \leq \gamma \leq \varepsilon$ .

Ricerca degli assi:

a) Per  $\varepsilon < 45^\circ \tan\varepsilon=e < 1$  caso Ellisse:

per  $\delta = 90^\circ \cos\delta = 0$  dalla figura vediamo  $O'P' = p$  e da

questo stesso capitolo sappiamo  $\overline{FA} = \overline{O'P'} = q(1-e^2) = \frac{m^2}{q} = p$

$$\text{quindi } q = \frac{p}{1-e^2} \quad m = \sqrt{qp} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad \text{e} \quad c = eq = e \frac{p}{1-e^2}$$

b) Per  $\varepsilon > 45^\circ \tan\varepsilon=e > 1$  caso Iperbole:

per  $\delta = 90^\circ \cos\delta = 0$  analogamente all'Ellisse avremo:

$$q = \frac{p}{e^2-1} \quad m = \sqrt{qp} = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \quad \text{e} \quad c = eq = e \frac{p}{e^2-1}$$

c) Per  $\varepsilon = 45^\circ \tan\varepsilon=e=1$  caso Parabola.

per  $\delta = 90^\circ \cos\delta = 0$   $p=a$  ed è accettato qualunque valore

d) Per  $\varepsilon = 0$  caso Circonferenza

nella trasformazione delle coordinate  $p$  diventa il raggio mentre deve essere  $1/e = \cos\delta$

Centratura delle figure. Nel caso si utilizzi come Eq. Polare il caso 7], cioè le coordinate  $X_v$  e  $Y_v$ , la figura risulta spostata rispetto all'origine, se si volesse centrarla, bisogna sottrarre all'ascissa il valore  $\left(\frac{a}{1-e^2}\right)$  (ma solo per Cerchio, Ellisse;

Iperbole). Dalla 7] si ottengono i vertici con  $\delta=0$  avremo  $\frac{a}{1-e}$  e con

$$\delta=180 \quad \frac{a}{1+e}.$$

