VIII. LE CICLOIDI

CICLOIDE

Le Cicloidi sono una «famiglia» di curve ottenuto dal moto di un punto che ruota su una circonferenza e con la *ipotesi* che:

I. il Centro della circonferenza emigra secondo una figura prestabilita.

II. il Centro della circonferenza non emigra ma il suo raggio varia in lunghezza in funzione dell’angolo della circonferenza (che vedremo nel CAP.VIII BIS CICLOIDI DI VAG a seguire).

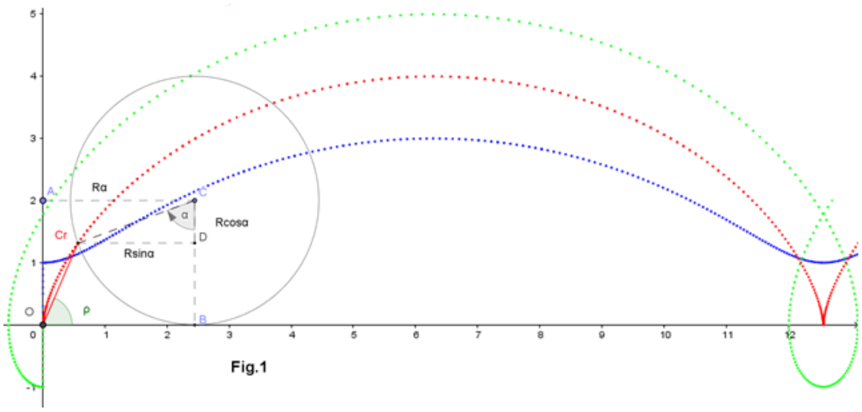


Fig.1

Secondo la letteratura consideriamo un punto Cr collegato ad un cerchio che rotola senza strisciare sopra una retta, con **raggio CrC=R** e con la condizione:

$$arc\overline{BCr} = \overline{OB} = \overline{AC} = R\alpha$$

per $\alpha \in (0,2\pi)$

$$\begin{cases} \overline{OCr}\cos\rho = R\alpha - \overline{CrC}\,\sin\alpha = R(\alpha - \sin\alpha) \\ \overline{OCr}sen\rho = R - \overline{CrC}\,\cos\alpha = R(1-\cos\alpha) \end{cases} \qquad \mathbf{1]}$$

nel caso si voglia un incremento o decremento di CrC di un valore $a \in (+a,-a)$ avremo:

$$\begin{cases} \overline{OCr}\cos\rho = R\alpha - (R+a)\,\sin\alpha \\ \overline{OCr}sen\rho = R - (R+a)\cos\alpha \end{cases}$$

$a = 0$ cicloide ordinaria (rossa)
$a > 0$ " allungata (verde)
$a < 0$ " accorciata (blu)

abbiamo così ottenuto una Cicloide Regolare.

Applet GEOGEBRA Fig.1 (clicca qui)

****

Applichiamo ora l’ipotesi I. in cui il centro della circonferenza si muove secondo un segmento di valore uguale al perimetro della circonferenza.

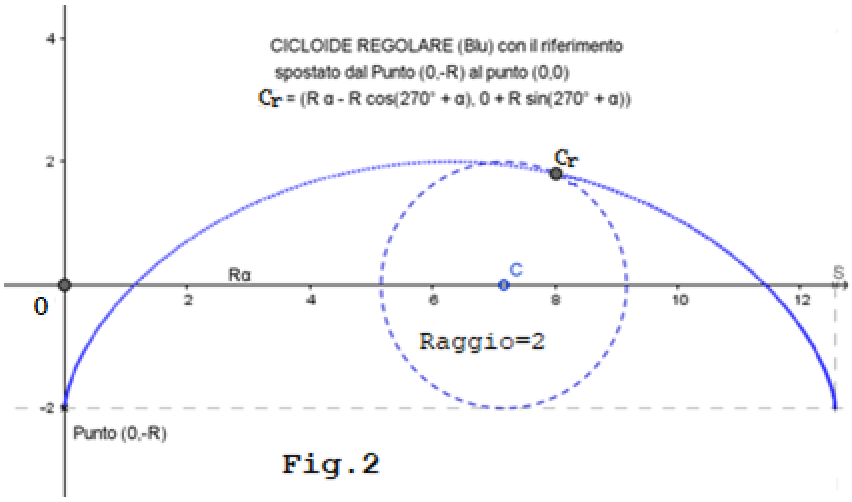


Fig.2

Poiché in **Fig.1** il rotolamento OB coincide con lo spostamento AC del centro della circonferenza di raggio=R, possiamo spostare il punto di riferimento ortogonale della equazione **1]** dal Punto(0,-R) al punto O(0,0) come si vede nella Fig.2 e scrivere la nuova equazione Parametrica:

$$\begin{cases} \overline{OCr}\cos\rho = R\alpha - (R+a)\cos(270°+\alpha) \\ \overline{OCr}sen\rho = (R+a)\sin(270°+\alpha) \end{cases}$$

che descrive la stessa Cicloide Regolare nel nuovo riferimento in cui C è il centro della circonferenza.

Inoltre per α∈(0,2π) della equazione vista il valore massimo di Rα è pari a (2Rπ) sull'asse delle ascisse, che possiamo parametrizzare in punti 2Rπsin(α) e sostituirlo a Rα ottenendo una nuova equazione parametrica, semplificata:

$$\begin{cases} \overline{\text{EllA}}\cos\rho = x = 2R\pi\ \sin\alpha - R\cos(270° + \alpha) = R(2\pi+1)\sin\alpha \\ \overline{\text{EllA}}\sin\rho = y = R\sin(270° + \alpha) = R\cos\alpha \end{cases}$$

Il valore (R2π) funzione di sinα, della nostra equazione è il percorso del centro della circonferenza e fornisce una curva chiusa cioè una ellisse rappresentata nella Fig.3 assieme alla CICLOIDE REGOLARE vista sopra, da cui abbiamo ricavato l'equazione.

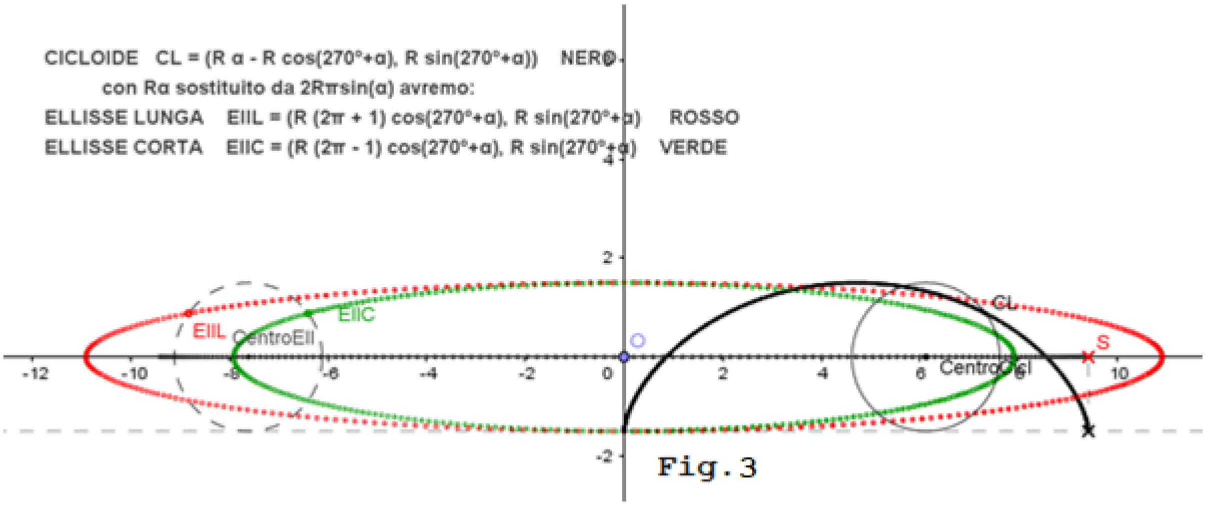


Fig.3

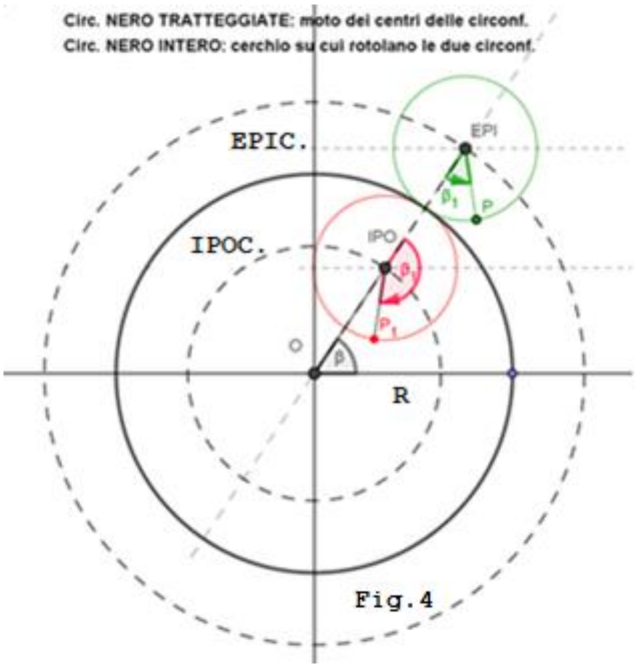
Applet GEOGEBRA Fig.3 (Clicca qui)

Tale Ellisse di Fig.3 ha semiassi:

$$\begin{cases} x = a\sin\alpha \\ y = b\cos\alpha \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} a = R(2\pi \mp 1) \\ b = R \end{cases}$$

In questo stesso capitolo analizzeremo curve appartenenti allo stesso caso I. ma il cui centro della circonferenza si sposta secondo una curva chiusa (Circonferenza o Ellisse).

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA



Eq. di Vag di una curva data da una circonferenza di raggio r di angolo β_1 che rotola all'esterno (Epicicloide) o all'interno (Ipocicloide) di una circonf. di raggio R. Ma osserviamo anche che i centri EPI e IPO emigrano, come da definizione di Cicloide, secondo la propria circonferenza.
In entrambi i casi sarà $R\beta = r\beta_1$ cioè le circonferenze percorrono archi eguali.

Epicicloide: considerando che il raggio r gira in senso antiorario con angolo: $[180+(\beta_1+\beta)]$
e che il punto P (vedi fig.) forma gli angoli: $(P\hat{O}x=\rho\ ;\ P_1\hat{O}x=\rho')$
avrò come somma di due segmenti orientati:

$$OP = (R+r)\cos(\rho-\beta)+r\cos[\rho-(180+\beta_1+\beta)]$$

tenendo presente $R\beta = r\beta_1;\quad R\beta + r\beta = r\beta_1 + r\beta;\quad (R+r)\beta = r(\beta_1+\beta)$ avrò:

1] $$\begin{cases} OP\cos\rho = (R+r)\cos\beta - r\cos(\beta_1+\beta) = (R+r)\cos\beta + r\cos\dfrac{R+r}{r}\beta = x_E \\ OPsen\rho = (R+r)sen\beta - rsen(\beta_1+\beta) = (R+r)sen\beta + rsen\dfrac{R+r}{r}\beta = y_E \end{cases}$$

(il + nel terzo membro della uguaglianza 1] ribalta soltanto la immagine)

* EPICICLOIDE $\quad OP = (R+r)\cos(\rho-\beta) - r\cos\left[\rho - \left(\dfrac{R+r}{r}\beta\right)\right]$

2) Ipocicloide: analogamente $R\beta = r\beta_1;\ R\beta - r\beta = r\beta_1 - r\beta;\ (R-r)\beta = r(\beta_1-\beta)$.
Poichè il raggio r gira in senso orario dovrò indicarlo come

$[360-(\beta_1-\beta)]$ e quindi $\begin{cases} +\cos(\beta_1-\beta) \\ -\text{sen}(\beta_1-\beta) \end{cases}$ per cui

$$\begin{cases} OP_1\cos\rho' = (R-r)\cos\beta + r\cos(\beta_1-\beta) = (R-r)\cos\beta + r\cos\dfrac{R-r}{r}\beta = x_I \\ OP_1 sen\rho' = (R-r)sen\beta - rsen(\beta_1-\beta) = (R-r)sen\beta - rsen\dfrac{R-r}{r}\beta = y_I \end{cases}$$

* IPOCICLOIDE $\quad OP_1 = (R-r)\cos(\rho-\beta) + r\cos\left[\rho + \left(\dfrac{R-r}{r}\beta\right)\right]$

CICLOIDE CIRCOLARE INTERNA (CONTINUA)

Si osservi che aver posto $R\beta = r\beta_1$ vuol dire che il rapporto β_1/β e' uguale ad una costante (= R/r). Inoltre per (-r) EPIC e IPOC si scambiano la curva.

Dagli esempi visti possiamo dunque scrivere la formula generale delle cicloidi interne ponendo nr = R dove $n \in R°$ (rappresenta il numero delle gobbe) con la condizione $R\beta = r\beta_1$ cioè $n\beta = \beta_1$

$$\begin{cases} \text{Epicicl } OP = (n+1)\, r \cos(\rho-\beta) + r\cos[\rho-(n+1)\beta] \\ \text{Ipocicl } OP_1 = (n-1)\, r \cos(\rho-\beta) + r\cos[\rho+(n-1)\beta] \end{cases}$$

Per r=1 avremo che R = n: in tal caso vuol dire che **n** governa sia il raggio di partenza (R) sia il numero delle "gobbe" sia dell'Epicicloide sia dell'Ipocicloide.

Per r<1 sarà r = 1/m quindi n/m = n' = R

Per R =n è (r=1) avremo che (R ± 1) = (n ± 1) comunque

$$\begin{cases} \text{Epicic } OP = (n+1)\cos(\rho-\beta) + \cos[\rho-(n+1)\beta] \\ \text{Ipocic } OP_1 = (n-1)\cos(\rho-\beta) + \cos[\rho+(n-1)\beta] \end{cases}$$

Per R = r sarà n=1 e si avranno solo l'Epicicloidi poichè l'Ipocicloide sarà $OP_1 = \cos\rho$

Avremo infine i valori delle coordinate:

$$\begin{cases} \text{Epicic} & \begin{cases} OP\cos\rho = (n+1)r\cos\beta + r\cos(n+1)\beta = x \\ OPsen\rho = (n+1)r\sin\beta + r\sin(n+1)\beta = y \end{cases} \\ \text{Ipocic} & \begin{cases} OP\cos\rho = (n-1)r\cos\beta + r\cos(n-1)\beta = x \\ OPsen\rho = (n-1)r\sin\beta - r\sin(n-1)\beta = y \end{cases} \end{cases}$$

CICLOIDE CIRCOLARE ESTERNA

Chiameremo Cicloidi Esterne le cicloidi date dal rotolamento di due circonferenze come visto per le Cicloidi Interne, ma il cui punto di partenza e' l'estremo opposto a quello di contatto.
In realtà le curve sia delle Cicloidi Interne che di quelle esterne sono identiche ma si presentano ruotate rispetto agli assi cartesiani:

$$\overline{OP} = R; \quad \overline{P_0C} = \overline{P_0'C_1} = r; \quad (R\beta = r\beta_1)$$

Epicicloide Est:

$$OP' = (R + r)\cos(\rho - \beta) + r\cos \rho - (\beta_1 + \beta)$$

$$\begin{cases} OP'\cos\rho = (R+r)\cos\beta + r\cos(\beta_1+\beta) = x \\ OP'\operatorname{sen}\rho = (R+r)\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(\beta_1+\beta) = y \end{cases}$$

Ipocicloide Est:

$$OP_1' = (R - r)\cos(\rho' - \beta) + r\cos \rho' - (180 + \beta - \beta_1) =$$

$$= (R - r)\cos(\rho' - \beta) - r\cos \rho' + (\beta_1 - \beta)$$

$$\begin{cases} OP_1'\cos\rho' = (R-r)\cos\beta - r\cos(\beta_1-\beta) = x \\ OP_1'\operatorname{sen}\rho' = (R-r)\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(\beta_1-\beta) = y \end{cases}$$

Fatte le dovute trasformazioni come per la cicloide interna (nr = R) avremo:

$$\text{Epicicloide est} \begin{cases} OP'\cos\rho = (n+1)r\cos\beta + r\cos(n+1)\beta = x \\ OP'\operatorname{sen}\rho = (n+1)r\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(n+1)\beta = y \end{cases}$$

$$\text{Ipocicloide est} \begin{cases} OP_1'\cos\rho' = (n-1)r\cos\beta - r\cos(n-1)\beta = x \\ OP_1'\operatorname{sen}\rho' = (n-1)r\operatorname{sen}\beta + r\operatorname{sen}(n-1)\beta = y \end{cases}$$

Nelle epicicloidi per (n = 1) si ha la curva detta CARDIOIDE.

LA EPICICLOIDE DETTA CARDIOIDE

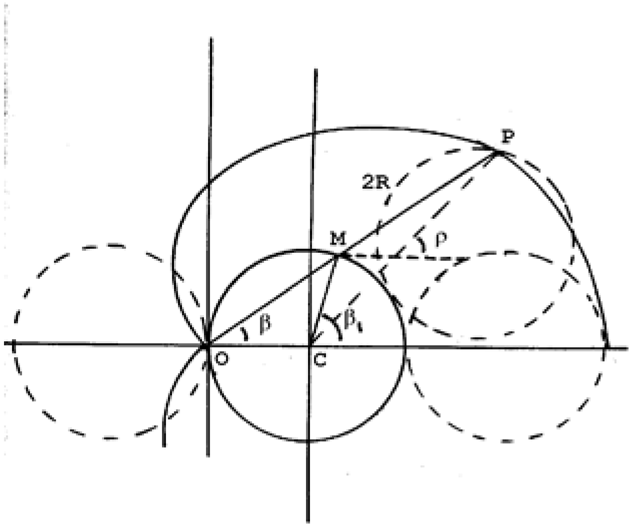


Fig.5

La Cardioide è rappresentata, per MP = 2R, dal segmento

$$1*)\quad \overline{OP} = 2R(1+\cos\beta)$$

Vogliamo far vedere che la cardioide non è che il rotolamento di una circonferenza su un'altra di eguale raggio. Consideriamo C centro dell'origine, sarà:

$$2*)\quad \overline{CP} = \overline{CM}\cos(\rho-\beta_1) + \overline{MP}\cos(\rho-\beta) = \\ = 2R\cos(\rho-\beta) + R\cos(\rho-\beta_1)$$

$$\begin{cases} CP\cos\rho = 2R\cos\beta + R\cos\beta_1 \\ CP\,\mathrm{sen}\,\rho = 2R\,\mathrm{sen}\,\beta + R\,\mathrm{sen}\,\beta_1 \end{cases}$$

Rispetto all'origine O avrò l'Eq. di Vag:

$$\begin{cases} OP\cos\beta = CP\cos\rho + R = 2R\cos\beta + R\cos\beta_1 + R \\ OP\,\mathrm{sen}\,\beta = CP\,\mathrm{sen}\,\rho = 2R\,\mathrm{sen}\,\beta + R\,\mathrm{sen}\,\beta_1 \end{cases}$$

che può anche essere scritta come $\begin{cases} (OP-2R)\cos\beta = R(1+\cos\beta_1) \\ (OP-2R) sen\beta = R sen\beta_1 \end{cases}$

$$\frac{sen\beta}{\cos\beta} = \frac{sen\beta_1}{1+\cos\beta_1}; \qquad sen\beta + sen\beta\cos\beta_1 = sen\beta_1\cos\beta$$

$sen\beta = sen\beta_1\cos\beta - \cos\beta_1 sen\beta = sen(\beta_1-\beta);$ risolubile per $2\beta = \beta_1$

$$\begin{cases} OP\cos\beta = 2R\cos\beta + R\cos 2\beta + R = 2R\cos\beta + 2R\cos^2\beta \\ OP sen\beta = 2R sen\beta + R sen 2\beta = 2R sen\beta + 2R sen\beta\cos\beta \end{cases} \qquad OP = 2R(1+\cos\beta)$$

che e' l'espressione di partenza 1*).
Se anzichè OP consideriamo P dall'origine C e in 2*) facciamo $2\beta = \beta_1$ avremo:

$$3*)\quad \begin{cases} CP\cos\rho = 2R\cos\beta + R\cos 2\beta \\ CP sen\rho = 2R sen\beta + R sen 2\beta \end{cases}$$

la quale non e' che l'Epicicl. Est. della pagina precedente fatto n = 1.
Quadrando e sommando si avrà $CP = \left|R\sqrt{5+4\cos\beta}\right|$ e sviluppando la 3*), l'Equazione della Cardioide rispetto al sistema con centro in C, per $2\beta=\beta_1$ diventa:

$$\overline{CP} = R\sqrt{5+4\cos\frac{\beta_1}{2}} = 2R\cos(\rho-\frac{\beta_1}{2}) + R\cos(\rho-\beta_1)$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO

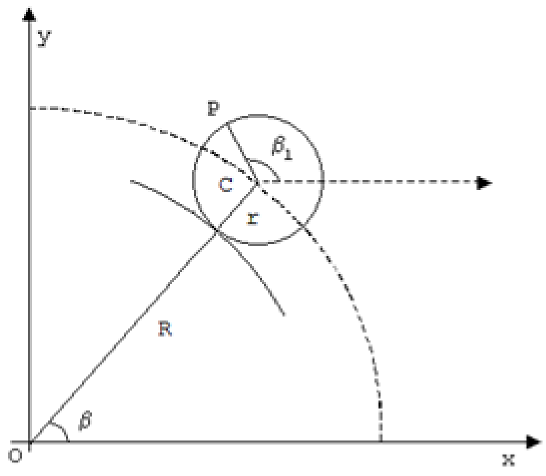


Fig.6

Se prendiamo una Epicicloide Circolare Esterna facciamo $R+r=R_C$ essa sarà tratteggiata come in figura in quanto riferita alla circonferenza di raggio OC per cui prenderà il nome di <u>*Cicloide Circolare a Centro*</u>:

$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\rho = R_c\cos\beta + r\cos(\beta_1+\beta) \\ \overline{OP}sen\rho = R_c sen\beta + rsen(\beta_1+\beta) \end{cases}$$

si osservi che β_1 è il valore dell'angolo quando sia:

$R\beta = r\beta_1$ (archi uguali)

$$(R+r)\beta = r(\beta_1+\beta) \qquad R_c\beta = r(\beta_1+\beta) \qquad \textbf{a]}$$

Poiché $\beta_1 = \frac{2\pi}{P_1}$ e $\beta = \frac{2\pi}{P}$ dove P_1 e P sono i rispettivi periodi di rivoluzione, dividendoli tra loro: $\frac{P}{P_1} = \frac{\beta_1}{\beta} = P_R \qquad \beta_1 = \beta P_R$

dove P_R =Periodo di Rivoluzione Relativo

*] $\begin{cases} \overline{OP}\cos\rho = R_c\cos\beta + r\cos[\beta(P_R+1)] \\ \overline{OP}sen\rho = R_c sen\beta + r\sin[\beta(P_R+1)] \end{cases}$ $\qquad \overline{OP} = R_c\cos(\rho-\beta) + r\cos(\rho-[\beta(P_R+1)])$

Qualora si volesse il valore β_0 che assume β per $\beta_1=2\pi$ si avrà:

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{P_R} \qquad \textbf{b]}$$

Il valore P_R rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare β_0, moto medio angolare, per avere 2π, (nel caso delle Cicloidi non a centro il periodo vale $\frac{R}{r} = \frac{2\pi}{\beta}$)

Nella formula *] per tutto il perimetro della circonferenza di raggio r si avrà l'intero arco $R_c\beta_0$; mentre se vogliamo $R_c 2\pi$ cioè i punti di tutto il suo perimetro e per r i punti di conseguenza dobbiamo considerare:

$$0 \le \beta P_R \le 2\pi$$

CICLOIDE CIRCOLARE A CENTRO (CONTINUA)

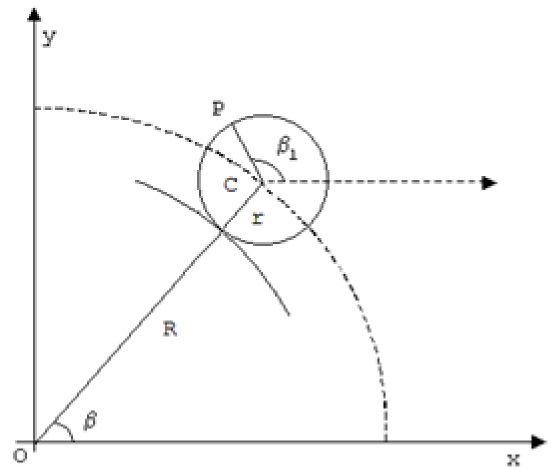


Fig.7

Se $R_c\beta_0$ e $r\beta_1$ sono archi proporzionali di due circonferenze non uguali, in una Cicloide Circolare a Centro avrò:

1] $R_c\beta_0 = r\beta_1 n_v$

dove n_v è il rapporto degli archi o della velocità media delle due circonferenze.

$$(R_c - r)\beta_0 = r\beta_1 n_v - r\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$$

E per $R = (R_c - r)$ avrò

$$R\beta_0 = r(\beta_1 n_v - \beta_0)$$

questa ultima espressione è ancora una Cicloide Circolare poiché $(\beta_1 n_v - \beta_0)$ rappresenta pur sempre un angolo; possiamo dunque fare

$\alpha = (\beta_1 n_v - \beta_0)$ $R\beta_0 = r\alpha$ dunque $(R_c - r)\beta_0 = r\alpha$ $R_c\beta_0 = r(\alpha + \beta_0)$

Posto il rapporto tra α e β_0: $\alpha = P_\alpha \beta_0$ dove P_α (come P_R già visto), rappresenta di quante volte dobbiamo moltiplicare β_0 per avere α, avremo $R_c\beta_0 = r\alpha + r\beta_0 = r\beta_0(P_\alpha + 1)$

Per $\alpha = 2\pi$ come in **b]** della pagina precedente: $2\pi = (\beta_1 n_v - \beta_0) = \beta_0 P_\alpha$;
abbiamo $\beta_1 n_v = 2\pi + \beta_0$ (vedi figura) e anche $\beta_1 n_v = \beta_0(P_\alpha + 1)$
si avrà infine l'Eq.di Vag

$$\begin{cases} \overline{OP}\cos\rho = R_c\cos\beta_0 + r\cos[\beta_0(P_\alpha + 1)] \\ \overline{OP}sen\rho = R_c sen\beta_0 + r\sin[\beta_0(P_\alpha + 1)] \end{cases} \qquad \overline{OP} = R_c\cos(\rho - \beta_0) + r\cos(\rho - \beta_0(P_\alpha + 1))$$

cioè ritroviamo la stessa eq. di vag con *] della pagina precedente, la differenza è che prima per archi uguali avevamo

$$\frac{R_c}{r} = \frac{\beta_1 + \beta_0}{\beta_0} = \frac{\beta_1}{\beta_0} + 1 = (P_R + 1)$$

ora invece per archi proporzionali è: $\dfrac{R_c}{r} = \dfrac{\beta_1}{\beta_0} n_v = (P_\alpha + 1)$.

CICLOIDE ELLITTICA - CIRCOLARE

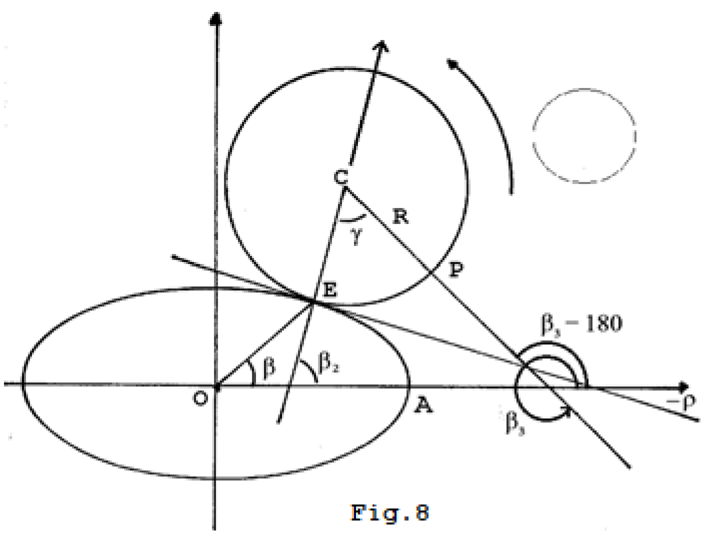


Fig.8

Data una Ellisse (assi:q,m)e la circonferenza di raggio R che percorrano eguali archi si trovi la Cicloide.
La fig. accanto da' i termini del problema: si cerchi la traiettoria del punto P estremo di OP, il quale ha angolo φ con l'asse x.

$$\overline{OP} = \overline{OE}\cos(\varphi-\beta) + EC\cos(\varphi-\beta_2) + CP\cos(\varphi-\beta_3)$$ EC=CP=R

che svolta in Eq. di Vag:
$$\begin{cases}\overline{OP}\cos\varphi = \overline{OE}\cos\beta + R\cos\beta_2 + R\cos\beta_3 \\ \overline{OP}sen\varphi = \overline{OE}sen\beta + Rsen\beta_2 + Rsen\beta_3\end{cases}$$

e rappresentando OE raggio di una Ellisse e EC=CP raggi di una circonferenza
$$\begin{cases}\overline{OE}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OE}sen\beta = msen\alpha\end{cases} \quad \tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha$$ (q>m semiassi)

$$\begin{cases}\overline{OP}\cos\varphi = q\cos\alpha + R(\cos\beta_2 + \cos\beta_3) = x_0 \\ \overline{OP}sen\varphi = msen\alpha + R(sen\beta_2 + sen\beta_3) = y_0\end{cases}$$

Da ciò si vede che il problema consiste nel cercare i valori degli angoli $\beta_2 e \beta_3$ fornendo il valore di α e quindi di $\beta = \arctan\left(\frac{m}{q}\tan\alpha\right)$.

Consideriamo i valori di α da 0° a 90°.
Si osservi che la tangente in E all'Ellisse e' anche tangente alla circonferenza e forma con il raggio un angolo retto.
L’angolo della tang. in E all'Ellisse e'
$$\tan\rho = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha};\ \ \rho = arc\tan\left(-\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

La tang. in E alla Circonferenza è $\tan\rho = -\frac{1}{\tan\gamma}$

Eguagliando le due tangenti $\tan\gamma = -\frac{1}{\tan\rho} = -\frac{q}{m}\tan\alpha;\ \gamma = \arctan\left(\frac{q}{m}\tan\alpha\right)$

Avremo dunque che $\beta_2 = (90 - \rho)$ e infine $\beta_3 = (180° + \beta_2 + \gamma)$

Possiamo cercare γ dal valore geometrico dell'arco

$$A\widehat{E} = \left[\frac{\sqrt{q^2 sen^2\alpha + m^2 \cos^2\alpha}}{2} + \frac{m}{2}\right]\frac{\alpha\pi}{180}$$

sappiamo essere per definizione gli archi AE = EP quindi

$$A\widehat{E} = E\widehat{P} = R\frac{\gamma\pi}{180}; \quad \gamma = \frac{A\widehat{E}}{R}\frac{180}{\pi}; \quad \beta_3 = (180 + \gamma + \beta_2)$$

Con che sono definite le coordinate: $\begin{cases} OP\cos\varphi = x_0 \\ OP\,\text{sen}\,\varphi = y_0 \end{cases}$

Per i valori di α da 91° a 180, 181° a 270, 271° a 360 il ragionamento e' lo stesso ma si deve tenere presente i relativi incrementi degli angoli e il valore dell'arco dell'Ellisse.

CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO

Date due ellissi, una con centro nella origine e l’altra sul perimetro di questa, e il Periodo Relativo P_R è riferito agli angoli e non agli archi:

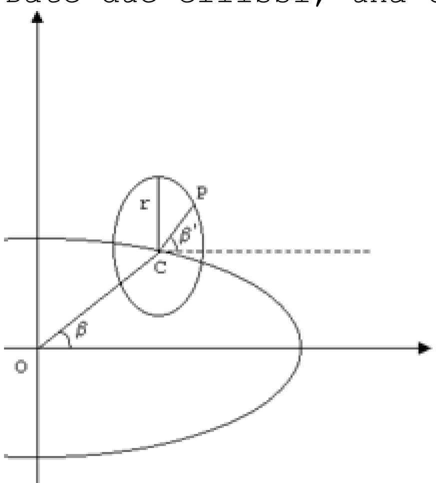


Fig.09

[1] se il Periodo è tra gli angoli delle Ellissi di semiassi q,m,β e q’,m’,β’ e il periodo $P_R\beta=\beta'$

$$\alpha' = arc\tan\frac{q'}{m'}\tan P_R\beta \qquad \alpha = arc\tan\frac{q}{m}\tan\beta$$

e $\begin{cases}\overline{OC}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OC}sen\beta = msen\alpha\end{cases}$ $\begin{cases}\overline{CP}\cos P_R\beta = q'\cos\alpha' \\ \overline{CP}senP_r\beta = m'sen\alpha'\end{cases}$

e l’Eq. di Vag $\begin{cases}\overline{\mathrm{OP}}\cos\varphi = \mathrm{q}\cos\alpha + \mathrm{q}'\cos\alpha' \\ \overline{\mathrm{OP}}\,\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{q}\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{q}'\mathrm{sen}\alpha'\end{cases}$

[2] se il Periodo è tra gli angoli delle circonferenze relative alle Ellissi e il periodo $P_R\alpha=\alpha'$

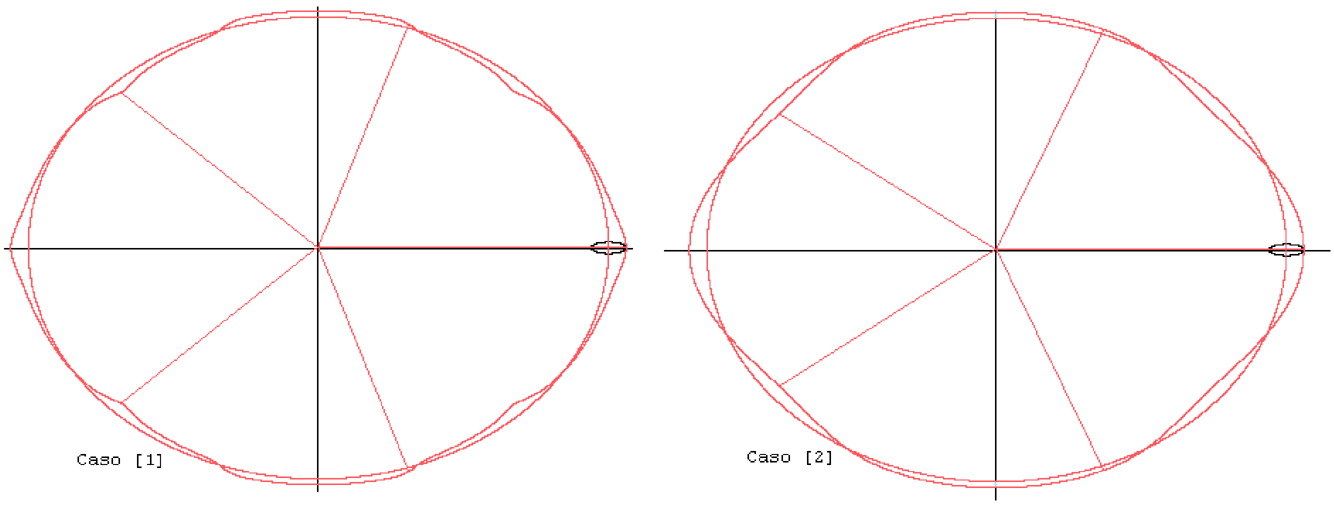
$\beta = arc\tan\frac{m}{q}\tan\alpha$ $\beta' = arc\tan\frac{m'}{q'}\tan P_R\alpha$ $\begin{cases}\overline{OC}\cos\beta = q\cos\alpha \\ \overline{OC}sen\beta = msen\alpha\end{cases}$ $\begin{cases}\overline{CP}\cos\beta' = q'\cos P_R\alpha \\ \overline{CP}sen\beta' = m'senP_R\alpha\end{cases}$

e l’Eq. di Vag $\begin{cases}\overline{\mathrm{OP}}\cos\varphi = \mathrm{q}\cos\alpha + \mathrm{q}'\cos(\mathrm{P_R}\alpha) \\ \overline{\mathrm{OP}}\,\mathrm{sen}\varphi = \mathrm{msen}\alpha + \mathrm{m}'\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{P_R}\alpha)\end{cases}$

Osservazione: nel caso **[1]** la curva risultante è irregolare perché ad angoli delle Ellissi proporzionali non corrispondono archi proporzionali; nel caso **[2]** la curva risultante è proporzionale perché ad angoli delle circonferenze proporzionali corrispondono archi di Ellissi proporzionali!
Per q=m o q’=m’ o per entrambi le Ellisse diventano circonferenze.

ESEMPIO DI CICLOIDE ELLITTICA A CENTRO

Applicando ciò che si è detto nel Capitolo precedente diamo un grafico di esempio per il Caso **[1]** e Caso **[2]**.
I valori per gli Assi sono: Q1=50, M1=20 per l'ellisse al centro, Q2=3, M2=1 per l'ellisse che ruota. Il valore P_R=5 per cui nel Caso **[1]** $\frac{\beta'}{\beta}=5$ e nel Caso **[2]** $\frac{\alpha'}{\alpha}=5$. Nel primo caso la curva è irregolare nell'altro più omogenea e sinusoide.



Diamo anche il grafico di una applicazione importante: quello ottenuto dalla ellisse della Luna che ruota sul perimetro dell'ellisse della Terra.
I valori degli assi sono quelli noti mentre il valore di P_R è ottenuto dal rapporto dei rispettivi Periodi di Rivoluzione:

$$P_R = \frac{\text{P.Riv.Terra}}{\text{P.Riv.Luna (Draconitico)}} = \frac{365{,}24}{27.21222} = 13{,}421911$$