

## **XVII. STUDIO SULL'EQ. DEL MOTO DEGLI ASTEROIDI**

SUL MOTO DEGLI ASTEROIDI

Dal Capitolo "V. PARAMETRI"/ PARABOLA e EQ.DEL MOTO DEGLI ASTEROIDI riprendiamo l'eq:

$$\begin{cases} \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = x = \pm \frac{R}{\cos \alpha} (1 - 2 \cos \alpha) \\ \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = y = \frac{R}{\cos \alpha} [\pm 2\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)}] \end{cases}$$

che si trasforma in circonferenza quando  $\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha_x} = R_x$  per

$\alpha_x = \text{costante}$  nel punto  $A_x$ ; e quando, poi, si ponga:  $\cos \alpha = \frac{1 - \cos \beta}{2}$  a]

si avrà:

$$\begin{cases} x = \frac{R}{\cos \alpha} \cos \beta = \frac{p}{1 - \cos \beta} \cos \beta \\ y = \frac{R}{\cos \alpha} \sin \beta = \frac{p}{1 - \cos \beta} \sin \beta \end{cases}$$

i cui ultimi termini sono i valori della Eq. Polare di una parabola del tipo (p+x) con il riferimento nel Fuoco. In questa ultima espressione  $\beta$  è un valore proprio della parabola, mentre  $\alpha$  è il valore di una circonferenza, un valore esterno che serve a governare la parabola stessa; noto  $\beta$  o  $\alpha$  e il valore p possiamo sempre ricostruire la relativa Parabola, che sappiamo può sempre trasformarsi in una circonferenza, con centro nel Fuoco.

FIGURA 1

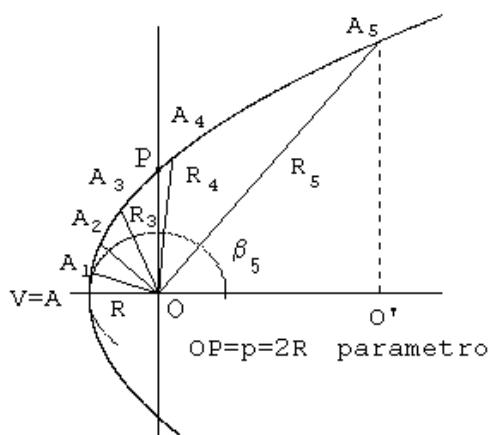


Fig. 1

Sia la parabola della Fig.1 dove le distanze  $OA_x$  sono i raggi delle infinite circonferenze di centro O, mentre le relative tangenti a ciascun punto, sono date da:

$$\tan \rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad \text{b]}$$

Nel nostro caso ( Fig.1) possiamo prendere come esempio:

$$\tan \rho_5 = \frac{\overline{OP}}{O'A_5} = \frac{p}{R_5 \sin \beta_5} \quad \text{dove } p = 2\overline{VO} = 2R$$

e per definizione la tangente nel punto P(0,2R) avrà angolo  $\rho = 45^\circ$ .  
Si osservi inoltre:

a)  $\overline{OP} = p = R_5 \sin \beta_5 \tan \rho_5$  oppure

b)  $p + x = R_5$   $p = R_5 - R_5 \cos \beta_5 = R_5(1 - \cos \beta_5)$ .

c) Da **b]** abbiamo il valore  $p = 2R = R_5 \sin \beta_5 \tan \rho_5$ , che può essere anche scritto (Cap.IIIbis "PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELLA PARABOLA - "Considerazioni sulla tangente alla parabola"):  $\beta = 2\rho$ , **proprietà della Parabola** in esame)  $p = 2R = R_5 \sin 2\rho_5 \tan \rho_5 = 2R_5 \sin^2 \rho_5$  vediamo essere una costante in funzione del raggio  $R_5$  e dell'angolo della tangente in  $A_5$ .

Dal valore  $R = R_5 \sin^2 \rho_5$  abbiamo  $R_5 = \frac{R}{\sin^2 \rho_5}$  ed anche

$$h = (R_5 - R) = R_5 - R_5 \sin^2 \rho_5 = R_5(1 - \sin^2 \rho_5) = R_5 \cos^2 \rho_5$$

cioè la distanza tra le circonferenze di raggio  $R_5$  e  $R$  (sempre con  $R=p/2$ ). Potendo anche fare  $R = R_3 \sin^2 \rho_3$  avremo che

$$R = R_5 \sin^2 \rho_5 = R_3 \sin^2 \rho_3 = \cos \tan te$$

Mentre la distanza tra le due circonferenze generiche è data da

$$R_5 - R_3 = \frac{R}{\sin^2 \rho_5} - \frac{R}{\sin^2 \rho_3}.$$

Per risalire al valore generico  $\frac{R}{\cos \alpha_5}$ , distanza di un punto dal

centro (Fuoco) nel Moto degli Asteroidi, basta considerare (da **a]**)  $2\cos \alpha_5 = (1 - \cos \beta_5)$  e sostituirlo in **b]** per cui  $p = 2R_5 \cos \alpha_5$ ;

$$\frac{p}{\cos \alpha_5} = \frac{2R}{\cos \alpha_5} = 2R_5 \quad \text{quindi} \quad \frac{R}{\cos \alpha_5} = R_5, \quad \text{valore che sappiamo trasformare}$$

l'equazione di parabola vista all'inizio in una circonferenza di raggio  $R_5$  a partire dal punto  $A_5$  e con il centro nel centro (Fuoco) della parabola.

*Per quanto detto (vedi la figura precedente) una parabola può dar luogo a infinite circonferenze, ma possiamo anche dire che una circonferenza può essere considerata generata da infinite parabole, tutte date dall'Eq. del Moto degli Asteroidi, tale che tutte le parabole abbiano almeno un punto in comune con la circonferenza, consideriamo le seguenti FIGURE:*

**FIGURA 2**

Nella Fig. 2 supponiamo di avere una circonferenza di centro O e raggio  $R_1$ , generata da una Eq. del Moto degli Asteroidi, che può essere una qualunque parabola, con un punto in comune con la circonferenza: questo vuol dire che la distanza AB di Fig.2 non può essere superiore a  $R_1$ , altrimenti il vertice di tale parabola, dovendo essere per definizione di parabola  $\overline{OB}=p=2R_1$ , cadrebbe in A''' e quindi non potrebbe generare la circonferenza segnata in figura.

Se l'Eq del Moto degli Asteroidi avesse avuto il suo vertice in:

- caso 1) A' (punto in comune con la circonferenza) avremmo  $AB=R_1$ ;
- caso 2) A'' e  $\overline{OA''}>R_1/2$  avremmo  $AB<R_1$  e  $\neq 0$  e B<sub>1</sub> punto comune
- caso 3) A<sub>1</sub> e  $\overline{OA_1}=R_1/2$   $AB=0$  e A punto comune
- caso 4) A''' e  $\overline{OA'''}<R_1/2$  con B<sub>2</sub> punto comune.

FIGURA 3

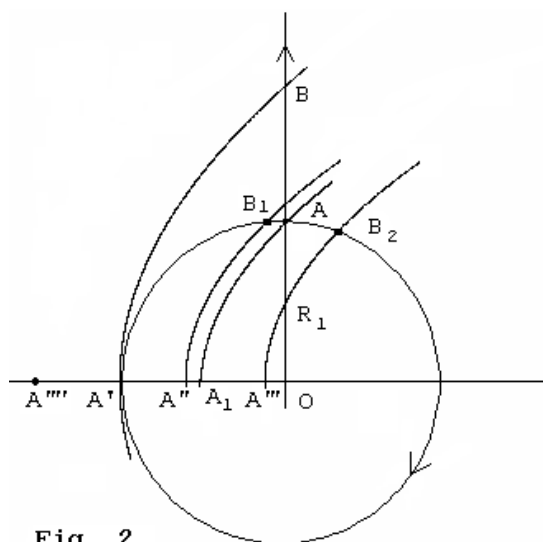


Fig. 2

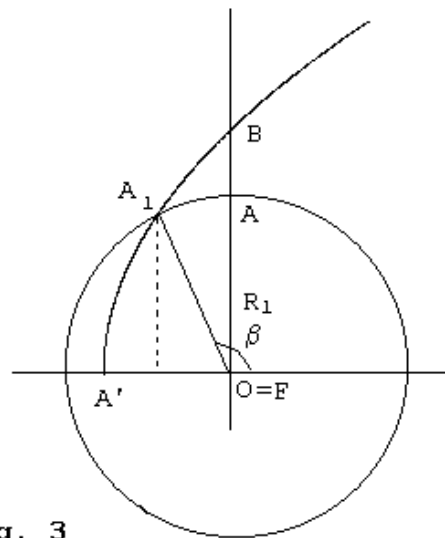


Fig. 3

Data una circonferenza originata da un Moto degli Asteroidi essa può ridiventare una delle infinite parabole che abbiamo indicato in FIGURA 2, alle seguenti considerazioni:

supponiamo che nel punto A<sub>1</sub> il punto della circonferenza torni a muoversi come una parabola (come in Fig. 3) e

che , fatto importante, l'asse delle X, del riferimento

cartesiano, passi per il vertice  $A'$  di tale parabola, e che sia  $O$  centro e del riferimento e della circonferenza, il che vuol dire anche che la tangente nel punto  $B$  alla parabola dovrà formare con l'asse delle  $X$  un angolo di  $45^\circ$  (per definizione); allora il valore dell'angolo  $\beta$  definisce un qualunque

$\cos \alpha = \frac{1 \pm \cos \beta}{2}$  dell'Eq. del Moto degli Asteroidi e si ha

$$\overline{OB} = p = 2\overline{OA}' = \overline{OA} + \overline{AB} = R_1 + \overline{AB} \quad 1]$$

inoltre dalla equazione della parabola  $\begin{cases} (p+x)\cos\beta = x \\ (p+x)\sin\beta = y \end{cases}$

essendo  $p+x = \overline{OA}_1 = R_1$  si ottiene  $x = R_1 - p$  e  $R_1 + \overline{AB} + x = R_1$  quindi  $x = -\overline{AB}$  per cui l'altezza  $h = |-\overline{AB}|$  è uguale in valore all'ascissa.

Pertanto le coordinate di  $A_1$  sono date da  $\begin{cases} R_1 \cos \beta = x = -\overline{AB} \\ R_1 \sin \beta = y \end{cases} \quad 2]$

ed i valori  $p = R_1 - x = R_1 + R_1 \cos(180 - \beta) = R_1(1 - \cos \beta)$  e  $\overline{OA}' = \frac{R_1}{2}(1 - \cos \beta)$  (caso 2) di Fig.2).

Dalla 2] si ricava che  $y = \pm \sqrt{R_1^2 - \overline{AB}^2}$  dove  $R_1 \geq \overline{AB}$ , infatti se fosse  $\overline{AB} > R_1$  questo vorrebbe dire che  $A'$  si troverebbe in  $A'''$  di Fig.2 (cioè senza nessun punto con la circonferenza); mentre per  $R_1 = \overline{AB}$   $A_1$  si troverebbe in  $A'$  di Fig.2.

**FIGURA 4**

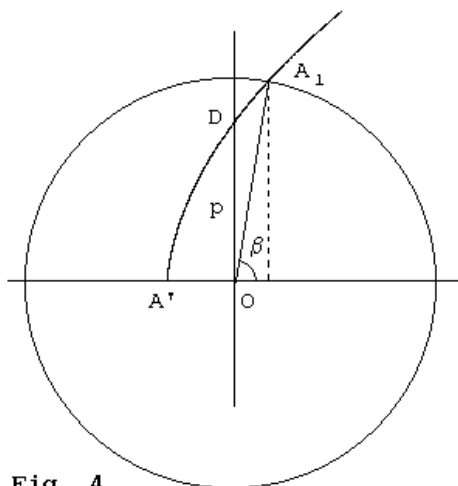


Fig. 4

Nel caso si avesse che  $\overline{OA}' < \frac{R_1}{2}$  (Fig. 4)

(con le stesse condizioni stabilite in **FIGURA 2** e **FIGURA 3**) il raggio  $R_1$  della circonferenza, dovrà essere per

definizione  $\overline{OA}' = \frac{\overline{OD}}{2} = \frac{p}{2}$  quindi  $p < R_1$  e

poiché il punto  $A_1$  dovrà essere punto della circonferenza e della parabola, si troverà dopo l'asse di riferimento  $y$

(OD) del riferimento cartesiano O (caso 4) di Fig. 2).  
 Inoltre con le stesse considerazioni fatte per FIGURA 3 si ha  
 $\overline{OA_1} = (p+x) = R_1$ ; e come si è visto  $\overline{OA_1} \cos \beta = x = (R_1 - p)$

$$p = R_1 - x = R_1 - R_1 \cos \beta = R_1(1 - \cos \beta); \quad \overline{OA'} = \frac{R_1}{2}(1 - \cos \beta).$$

**FIGURA 5A**

Sia ora una qualunque circonferenza di centro O e raggio  $R_1$ , come in Fig.5A: i valori delle coordinate di un punto noto  $A_1$  dipenderanno dal riferimento cartesiano di centro O, che adottato. Supponiamo, dunque, di aver adottato il riferimento YOX (non tratteggiato) come in Fig. 5A in cui l'asse delle X passa per il centro O (fuoco) e il vertice della parabola e quindi sia determinato l'angolo  $\beta$ . I ragionamenti fatti relativamente alle

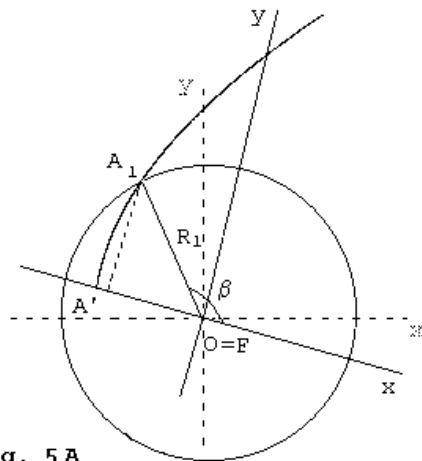


Fig. 5A

Fig. 3 e 4 non cambiano, essi sono gli stessi, per la determinazione della parabola che vediamo in Fig. 5A (riferimento YOX non tratteggiato); ma la parabola indicata è diversa da quella di Fig. 3 e 4, in quanto ora il vertice della parabola  $A'$ , viene a cadere più vicino al punto  $A_1$ , cioè varia l'angolo della tangente, in  $A_1$ .

Possiamo dire che la posizione del riferimento cartesiano con centro in O, rispetto ad  $A_1$  determina il valore di  $\beta$  oppure che il valore di  $\beta$

determina l'orientamento del riferimento; ed è in base a questo orientamento che è possibile determinare la parabola di una dell' Eq. del Moto degli Asteroidi, che ha determinato la circonferenza, con i passaggi e le considerazioni già visti nelle Fig. 3 e 4.

**FIGURA 5B**

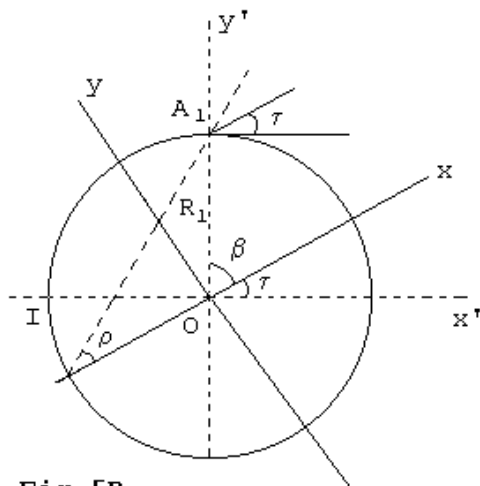


Fig. 5B

Il caso di Fig. 5B può essere visto come una rotazione del sistema di riferimento rispetto al punto  $A_1$ ; in tal caso il valore  $\beta$  è dato da  $(90^\circ \pm \tau)$  (in figura 5B  $(90^\circ - \tau)$ ) dove  $\tau$  è l'angolo di rotazione: di conseguenza si avrà che l'angolo  $\rho$  della tangente in  $A_1$  della parabola sarà  $2\rho = \beta$  per definizione di parabola e quindi  $2\rho = 90^\circ - \tau$ . Si osservi che  $\overline{OA_1} = \overline{IO} = R_1$ . Possiamo scrivere la Eq. Parametrica di Vag relativa al riferimento XOY.

$$\begin{cases} \overline{OA_1} \cos \beta = R_1 \cos \beta = x \\ \overline{OA_1} \sin \beta = R_1 \sin \beta = y \end{cases} \quad \text{dove } A_1 \text{ in quanto}$$

punto della parabola sarà  $\overline{OA_1} = p + x = R_1$ , cioè

$$p = R_1 - R_1 \cos \beta = R_1(1 - \cos \beta) = R_1 2 \cos \alpha$$

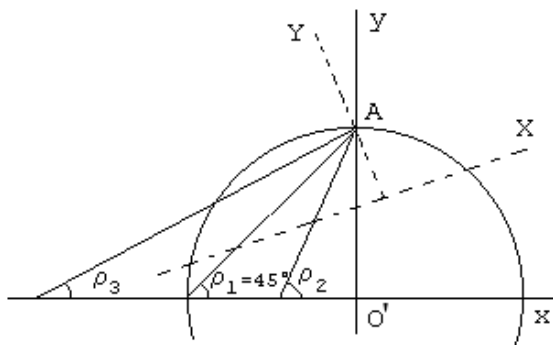
Poiché sappiamo  $p = 2\overline{OV} = 2R$  (V vertice della parabola ed R sua distanza dal centro O) possiamo anche scrivere

$$2R = R_1(1 - \cos \beta_1) = R_1 2 \cos \alpha_1$$

dove abbiamo  $R_1 = \frac{R}{\cos \alpha_1}$  cioè il valore del parametro della eq. del

Moto degli Asteroidi quando questa si trasforma in una circonferenza nel punto  $A_1$  e raggio  $R_1$ .

IL MOTO DEGLI ASTEROIDI TRAMITE TANGENTE.



**Fig. 6**

Siano gli angoli  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , i valori delle tangenti delle parabole passanti per il punto A. Questi valori non possono essere che relativi, vedi **Fig. 6**, in quanto essi dipendono dal riferimento cartesiano scelto. Analizziamo, dunque, quale è la parabola che il punto A, di una circonferenza, percorrerebbe se la tangente della parabola in A avesse il valore  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ .

Intendiamo il valore di tali angoli quello dato dalla incidenza della tangente con l'asse x del riferimento  $O'$  di **Fig. 6**, passante per il fuoco e il vertice della parabola.

Ricordiamo che in generale per ciascun punto è:

$$\tan \rho = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} = \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \quad 1]$$

**Es.1)** il caso di  $\rho_1 = 45^\circ$  è intuitivo dalla definizione di parabola (Caso 3) di **FIGURA 2**) dove per  $OA = R_1$  il vertice V sull'asse delle x

è  $(-R_1/2, 0)$  ed il centro O della parabola è anche centro di tutte le circonferenze.

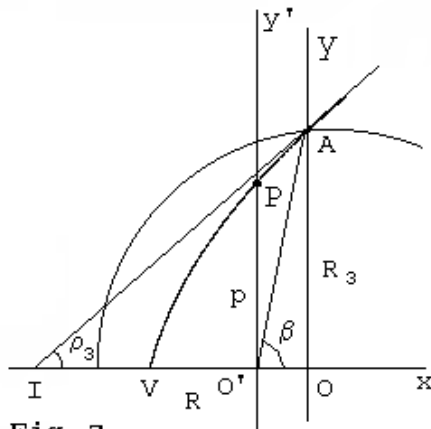


Fig. 7

**Es.2)**  $45^\circ > \rho_3 > 0$  Caso di **Fig. 7** dove la parabola ha il Fuoco in  $O'$  e non da  $O$  e nella posizione indicata dalla Fig. 6 con  $p$ =parametro; inoltre

$$A(OO'; R_3); \quad \text{con } \overline{OO'} = \frac{R_3}{\tan \beta}.$$

E'  $VO' = R = p/2$  mentre nel punto  $A$  la tangente ( $\rho_3$ ) avrà valore:

$$\tan \rho_3 = \frac{p}{y} = \frac{p}{R_3}; \quad p = \overline{O'P} = R_3 \tan \rho_3 = 2\overline{VO'} = 2R$$

(tale valore è lo stesso di quello

visto in **Fig. 1** qualora si faccia  $R_3 = O'A_5 = R_5 \sin \beta_5$ )

Dalla **1]**  $\cos \alpha = \frac{\tan^2 \rho_3}{1 + \tan^2 \rho_3} = \sin^2 \rho_3$  e  $\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \rho_3 = \cos 2\rho_3$

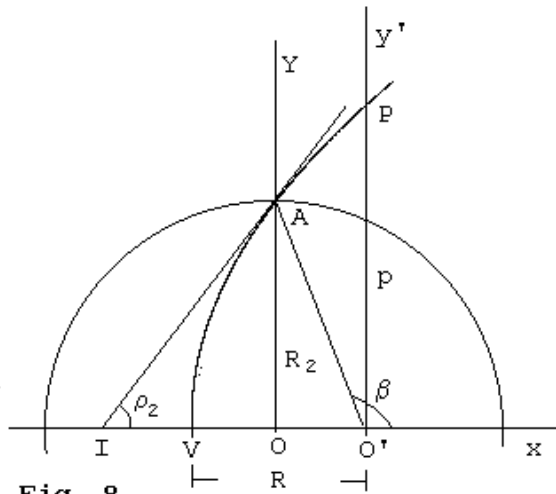
da cui  $\beta = 2\rho_3$  dunque conoscere l'angolo  $\rho_3$  della tangente equivale a conoscere il valore dell'angolo  $\beta$  della parabola nel riferimento  $O'$  (non  $O$ ).

In quanto l'angolo  $\hat{IAO}' = \rho_3$  vuol dire che il triangolo  $IAO'I$  è un triangolo Isoscele, e  $\overline{IO'} = \overline{AO'}$ , cose che già avevamo visto nel Cap. IIIbis "PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELLA PARABOLA - Considerazioni sulla tangente alla parabola" ed avevamo anche dimostrato che  $IV = VO$ .

**Es.3)**  $45^\circ < \rho_2 < 90^\circ$  Caso di **Fig. 8** dove la parabola ha il Fuoco nell' origine  $O'$  e non da  $O$ , e nella posizione indicata dalla Fig.

6 con  $p$ =parametro; inoltre  $A(OO'; R_2)$  con  $\overline{OO'} = \frac{R_2}{\tan \beta}$ . Il procedimento

è identico a quello di Fig. 7. Nel punto A la tangente ( $\rho_2$ ) avrà valore:



$$VO' = R = p/2;$$

$$\tan \rho_2 = \frac{p}{y} = \frac{p}{R_2};$$

$$p = R_2 \tan \rho_2 = 2R$$

Dalla 1]  $\cos \alpha = \frac{\tan^2 \rho_2}{1 + \tan^2 \rho_2} = \sin^2 \rho_2$

quindi  $\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \rho_2 = \cos 2\rho_2$

da cui:  $\beta = 2\rho_2$

Tutto è come nell' **Es.2)** e quindi il triangolo IAO'I è un triangolo Isoscele, e, ripetiamo, il valore  $\beta$  è relativo al riferimento O' (non O).

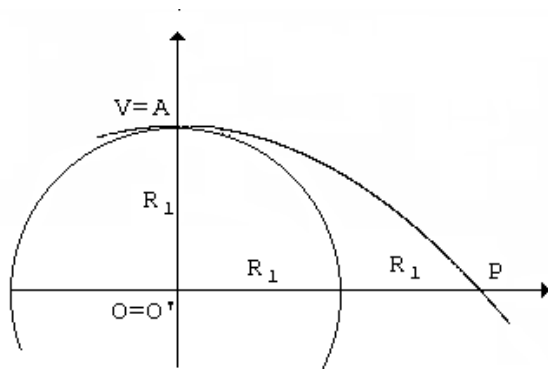


Fig.9

**Es.4)**  $\rho = 90^\circ$  Caso di **Fig. 9** ( $90^\circ$  è sempre riferito all'asse delle x); per cui la tangente in A coincide con l'asse delle Y, analogamente il punto A e il vertice V della parabola; il punto origine O con O'.

$$VO' = VO = R_1 = p/2 \quad p = 2R_1$$

In conclusione riferendoci agli esempi analizzati (caso **Es.1)**; **Es.2)**; **Es.3)**; **Es.4)**) se il punto A partisse secondo la tangente di



Ellisse di semi-assi  $(R_q + \overline{OO'}) = q$   $(R_q - \overline{OO'}) = m$  che dà luogo all' Eq.

Parametrica di Vag dell' Ellisse di angolo  $\beta_E$ :

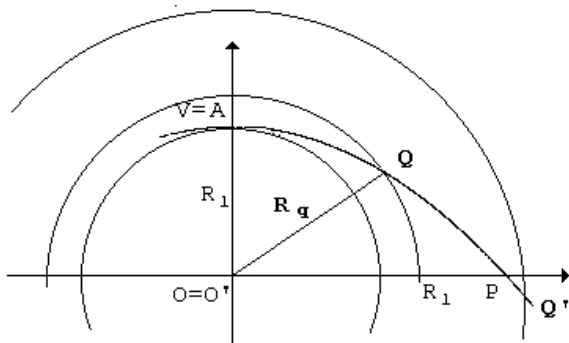
(Cap."VI. TRASLAZIONE ROTAZIONE"/TEOREMA DEI PIANETI)

$$|\overline{OQ}| = \left( m \cos \frac{\beta_q}{2} \right) \cos \beta_E + \left( q \sin \frac{\beta_q}{2} \right) \sin \beta_E \quad \begin{cases} |\overline{OQ}| \cos \beta_E = x = (R_q - \overline{OO'}) \cos \frac{\beta_q}{2} = m \cos \frac{\beta_q}{2} \\ |\overline{OQ}| \sin \beta_E = y = (R_q + \overline{OO'}) \sin \frac{\beta_q}{2} = q \sin \frac{\beta_q}{2} \end{cases}$$

$$\overline{OQ}^2 = \left( m \cos \frac{\beta_q}{2} \right)^2 + \left( q \sin \frac{\beta_q}{2} \right)^2 \quad \tan \beta_E = \frac{q}{m} \tan \frac{\beta_q}{2}$$

Analogamente sarà il ragionamento per il caso **Es.3)** di **Fig.8**.

Nel caso **Es.4)** di **Fig.9** essendo  $O=O'$ , quindi  $OO'=0$ , l' Ellisse del



**Fig.B**

punto  $Q$ , diventa una Circonferenza di raggio  $R_q$  e di centro  $O$  concentrica con la circonferenza del punto  $A$  ( Fig.B). Questo caso spiega come alcuni satelliti percorrino una orbita circolare!

Analogamente è per il caso **Es.1)** con  $\rho_1=45^\circ$  in quanto anche qui è  $O=O'$ .

IL MOTO PERPENDICOLARE

ANALISI DELLA FIG. 9.

Supponiamo invece che alle condizioni viste per il caso di **Fig.9**, il punto A si muova sulla circonferenza con moto sinistrorso e il punto P secondo la direzione del raggio R. Come è mostrato nella **Fig.10**. Allora il punto  $P_0$  si muove secondo due movimenti: quello sinistrorso della circonferenza e quello perpendicolare ad essa.

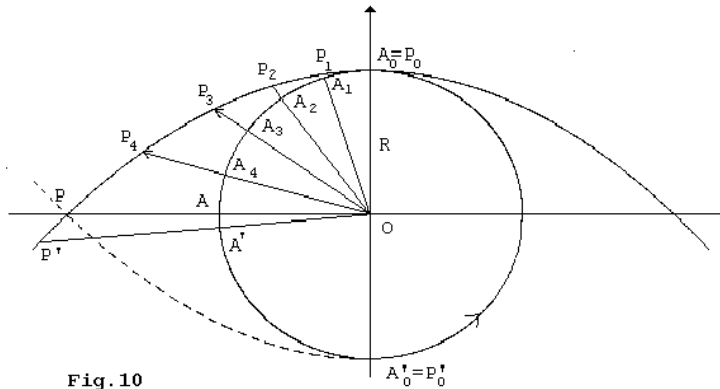


Fig.10

I punti  $P_1, P_2, P_3$  ecc. sono punti di una parabola (con origine nel fuoco) relativamente alla posizione di  $A_1, A_2, A_3$  ecc. della circonferenza, mentre  $OP_1=R_1, OP_2=R_2, OP_3=R_3$  ecc. possono essere considerati come i raggi di tutte le circonferenze che formano tale parabola, parabola il cui vertice è in  $A_0=P_0$ , ed



da cui  $\overline{C_3T_3} = \overline{C_3P_3}$  (e  $\overline{OP_3} = \overline{OM} = R_3$  ma  $\overline{OA_0} = R$ )

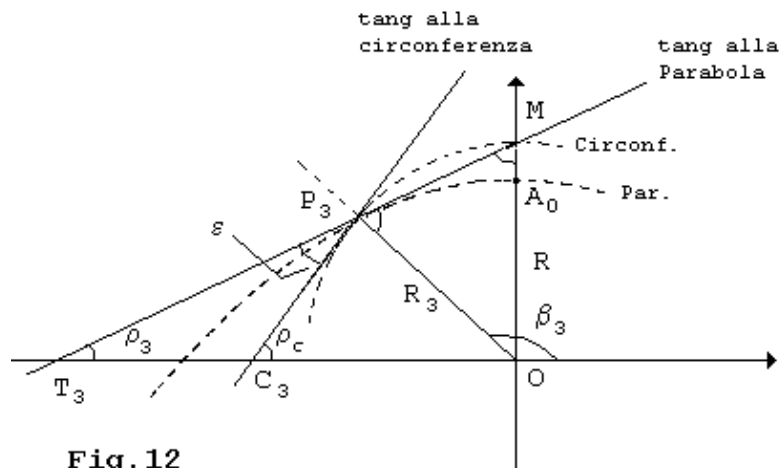


Fig. 12

Noto, dunque,  $\varepsilon$  e di conseguenza  $\rho_3$  e  $\beta_3$  possiamo tracciare la nostra parabola avendo tutti i dati necessari:

da  $\begin{cases} x = R_3 \cos \beta_3 \\ y = R_3 \sin \beta_3 \end{cases}$  e da  $\overline{OP_3} = (p - y) = R_3$  abbiamo il parametro

$p = 2R = R_3(1 + \sin \beta_3) = R_3(1 + \sin(90 + 2\rho_3)) = R_3(1 + \cos 2\rho_3) = 2R_3 \cos^2 \rho_3$  **A]**

E' importante sapere che l'andamento e i valori di **Fig.12** e di **Fig.3** in **FIGURA 3** sono gli stessi; basta vedere che:

$p = R_3(1 + \sin \beta_3)$  di **Fig.12** e  $p = R_1(1 - \cos \beta)$  di **Fig.3** si equivalgono quando si consideri il diverso tipo di parabola  $p + x = R_1$  con  $x = R_1 \cos \beta$  e  $p - y = R_3$  con  $y = R_3 \sin \beta_3$ .

Infine, se anziché il punto  $P_3$  avessimo preso in considerazione il punto  $P'$  (**Fig.10** o **Fig.11**) le considerazioni fatte sarebbero state le stesse ma avremmo dovuto paragonarlo al caso di **FIGURA 4**.

Si tenga presente che il caso analizzato è diverso da quello illustrato nel caso **Es.3)** di **Fig.8**.

Nella **Fig.8** l'asse delle x è perpendicolare al raggio  $R_2$  della circonferenza, mentre nella **Fig.11** l'asse delle x non è perpendicolare al raggio  $R_3$  della circonferenza del punto  $P_3$ :

- a) nella **Fig.8** creiamo una Parabola, a cui il punto A dovrà appartenere e le cui circonferenze hanno centro in  $O'$  e non in O.
- b) nella **Fig.11** cerchiamo la parabola che passa per il punto  $P_3$ , cioè una parabola il cui vertice supponiamo esistere ed

essere in  $A_0$  ed il Fuoco in  $O$  e le cui circonferenze hanno lo stesso centro in  $O$ .

E' importante dalla **Fig.11** osservare che essendo

$$\text{il parametro (già visto)} \quad p = 2R = 2R_3 \cos^2 \rho_3 \quad \mathbf{A]}$$

$$\text{e l'altezza in Fig.11} \quad \overline{A_3P_3} = \overline{A_0M} = h = R_3 - R \quad h = R_3 \sin^2 \rho_3 \quad \mathbf{B]}$$

cioè lo stesso valore di  $R$  e della distanza  $h$  tra le circonferenze che avevamo visto nella **FIGURA 1**, ora però ruotata di  $90^\circ$ .

Per un valore di  $\rho_3 = 45^\circ$  si avrà  $2R = R_3$  e  $h = \frac{R_3}{2} = R$

Semplificando **A]** e **B]** si avrà (Fig.12):

$$h = R \tan^2 \rho_3 = R \tan^2 \frac{\rho_c}{2} = R \tan^2 \varepsilon \quad (\text{con } R=p/2) \quad \mathbf{C]}$$

Se il punto  $P_3$  della parabola inverte la propria direzione esso percorrerà una parabola di ritorno, come nell'esempio di **Fig.14**,

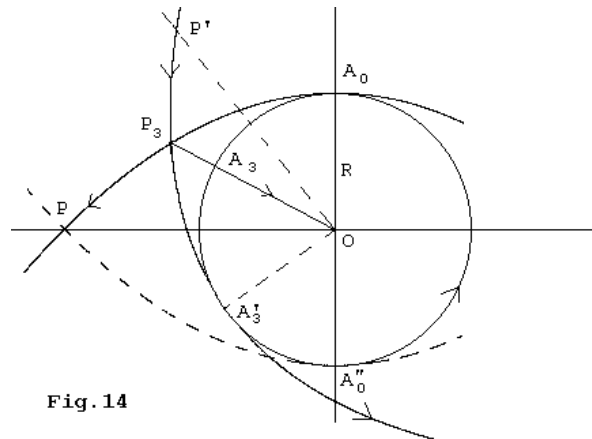


Fig.14

e incontrerà la circonferenza in  $A_3$ , in cui sono uguali gli archi di parabola  $\overline{A_0P_3} = \overline{P_3A'_3}$  e gli archi della circonferenza  $\overline{A_0A_3} = \overline{A_3A'_3}$  e dove il punto  $A'_3$  diventa il nuovo vertice della parabola, distante  $R$  dal centro  $O$ , con parametro di parabola  $p = \overline{OP'} = 2R$ . La stessa cosa avviene per il punto  $P = 2R$  dal centro  $O$ .

Anche il punto  $P'_5$ , come vediamo nella fig.15, nell'invertire la direzione percorrerà una parabola, speculare a quella di partenza,

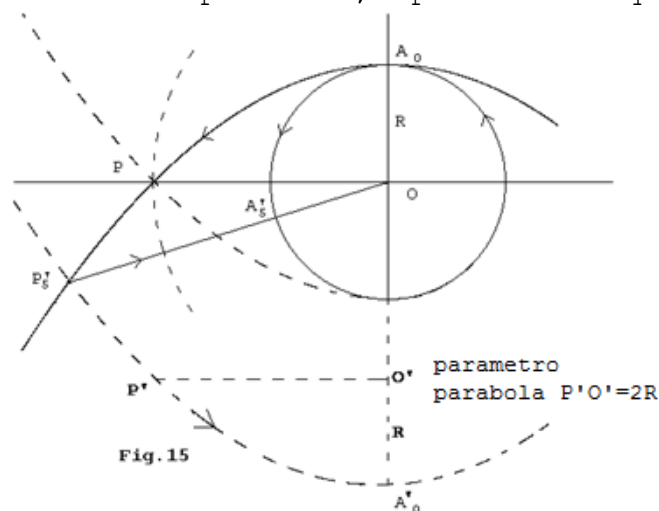


Fig.15

ma avendo superato il punto  $P$  della prima parabola ora non incontrerà più la circonferenza di raggio  $R$ . Il suo vertice è ora il punto  $A'_0$ , il suo fuoco è in  $O'$  ed il suo parametro  $p$  è  $O'P'$ .

ALTEZZA, GITTATA E VELOCITA' DI FUGA.

Se nel caso **B]** Pag.11 visto poniamo  $R_3 = \frac{V_3^2}{2g}$  ( $g$ =gravità superficiale) avremo

$$h = \text{ALTEZZA DI UN PUNTO} = \frac{V_3^2 \sin^2 \rho_3}{2g}$$

la formula classica per un generico punto  $P_3$  di tutti i libri di testo.

La sua gittata sarà il valore dell'ascissa  $x_3$  ottenuta da **1]** di **Fig.11:**

$$x_3 = -p \tan \rho_3 \quad \text{ed essendo} \quad p = 2R_3 \cos^2 \rho_3$$

$$x_3 = -2R_3 \cos \rho_3 \sin \rho_3 = -R_3 \sin 2\rho_3 \quad \text{ma} \quad R_3 = \frac{V_3^2}{2g}$$

avremo la

$$2x_3 = \text{GITTATA} = -\frac{V_3^2 \sin 2\rho_3}{g} = -\frac{V_3^2 \sin \rho_C}{g}$$

La gittata assume valori negativi perché nel nostro esempio esso va da 0 (origine) verso A, cioè le curve vanno da  $P_0$  a  $P$  e da  $A_0$  ad A.

Al solo scopo di una verifica delle formule dalla Fisica analizziamo la velocità di fuga (cioè la minima velocità iniziale perché un corpo sfugga all' attrazione gravitazionale):

$$v_F^2 = \frac{2GM}{R}$$

( $G$ =costante di gravit.;  $M$ =massa del pianeta;  $R$ =raggio del pianeta) Mentre l'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta in esame è data da  $g = \frac{GM}{R^2}$ ;  $2Rg = 2\frac{GM}{R}$ .

Dalle due formule avremo la velocità di fuga:

$$v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg} = \sqrt{pg} \quad (2R=p \text{ parametro parabola})$$

Giusto nella Fig.15 abbiamo visto, che se il punto supera questa altezza, in caso di ritorno esso non incontra più la circonferenza di partenza: tale distanza corrisponde al valore **PARAMETRICO** della parabola che esso percorre.

Da **A]** per  $R = R_x \cos^2 \rho_x$  più in generale la velocità parabolica lungo tutta la curva è:

$$V_p = \sqrt{2R_x g \cos^2 \rho_x}$$

- a) per  $\rho_x=0$  abbiamo la velocità di fuga nel punto  $P_x$ , che è una velocità parabolica.
- b) per  $\rho_x=45^\circ$  il punto  $P_x$  coincide con  $P$  per definizione di parabola per cui  $V = \sqrt{2R_x g \cdot 0,5} = \sqrt{R_x g} = \sqrt{2R g}$ : in tal punto la

velocità circolare di raggio  $OP$  e la velocità parabolica coincidono; inoltre il punto  $P$  è il punto di fuga del sistema (il punto  $P'$  non incontra più la circonferenza, vedi **Fig.15**).

Infatti per  $R=6378,099$  Km (raggio terrestre) avremo il punto di fuga della terra 10,18.

La formula che dà la Velocità Circolare alla distanza  $(R_T+h)$  sappiamo essere

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

e con  $h=R \tan^2 \rho_x$  come da **C)** Pag.11 sarà:

$$V_c = \sqrt{\frac{GM}{R} \frac{1}{1+\tan^2 \rho_x}} = \sqrt{Rg \cos^2 \rho_x} \quad *)$$

dove per  $\rho_x=0$  sarà  $h=0$  e  $V_{Co} = \sqrt{Rg}$  (velocità al suolo).

**Esempio:** il satellite Oscar ruota alla distanza di 1450 Km con  $V_{Co}=7,14$  (Km/sec) e  $V_F=10,09$  (Km/sec).

Verifichiamo le formule: applichiamo **C]**  $1450 = R_T \tan^2 \rho$  ( $R_T=6378,099$  Km raggio equator.;  $g=0,00981$  Km/s<sup>2</sup>) per cui  $\rho = \arctan \sqrt{\frac{1450}{6378,099}} = 25,491915$  .

Per **\*)**:  $V_{Co} = \sqrt{R_T g \cos^2 25,491915} = 7,13999 = 7,14$  Km/sec ;  $V_F = V_{Co} \sqrt{2} = 10,09$  Km/sec (velocità circolare e di fuga nel punto distante  $h=1450$  Km dalla terra).

Si osservi che un punto materiale che percorra lo spazio secondo una parabola può incontrare una geosfera (come circonferenza) nel punto A (punto di impatto), ma il punto A che se ne voglia allontanare essendo dotato di una velocità propria (velocità al suolo) percorre una parabola il cui parametro  $p$  è dato secondo le considerazioni fatte.

IL MOTO NON PERPENDICOLARE

ANALISI DELLA FIG. 7.

Analizziamo la **Fig.16** in cui ci riferiamo ad una parabola ben precisa in cui  $p(\text{parametro})=2R$  ed il Fuoco in  $O$  e a un punto  $P_x$  di una qualunque circonferenza di raggio  $R_x$  e alla sua tangente. Ora

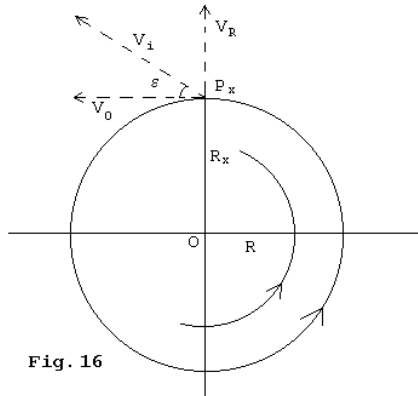


Fig. 16

il vettore  $V_i$  risultato delle due componenti, una secondo il raggio vettore  $V_R$  e l'altra  $V_0$  normale ad esso sarà  $V_i^2 = V_R^2 + V_0^2$  allora  $V_i$  formerà un angolo  $\varepsilon$  uguale all'angolo  $\rho$  della tangente alla parabola nel punto  $P_x$  e per ciò che è stato detto della **Fig.11** avremo:

- a) se  $\varepsilon=90$  avremo il caso del MOTO PERPENDICOLARE ora analizzato
- b) se  $45<\varepsilon<90$  avremo che  $P_x= P_3$  come in Fig.14.
- c) se  $0<\varepsilon<45$  avremo che  $P_x=P'$  come in Fig.15.

Se consideriamo sempre il vettore  $V_0 \neq 0$  il caso  $\varepsilon =90^\circ$  in realtà non si verificherà mai per cui se noi partiamo solo dalla conoscenza di  $\varepsilon (= \rho)$ , come valore della tangente di una qualunque parabola, in generale dovremo rifarci al caso **Es.3) Fig.8** per la b) e al caso **Es.2) Fig.7** per la c), avremo cioè un MOTO NON PERPENDICOLARE.

Nella analisi della **Es.2) Fig.7** avevamo visto che la relativa parabola percorsa da A ha il suo vertice entro la circonferenza di raggio  $R_3$  ed il suo parametro abbiamo visto essere  $p=2R=R_3 \tan \rho_3$ , dove  $\rho_3$  rappresenta l'angolo imposto (possiamo dire l'alzo) nel punto A.

In altri termini variando il valore  $\rho$  della tangente di partenza (**in pratica  $\varepsilon$** ) varia la parabola a cui noi riferiamo il moto parabolico del punto A.

E' importante, invece, analizzare il percorso inverso del punto A, quando dopo aver percorso la parabola che gli è propria, giunto nel punto segnato Q inverte il moto come si vede in Fig.17.

Tale moto di ritorno è sempre (idealmente) speculare rispetto alla circonferenza di raggio R e gli archi  $\widehat{VQ}_0 = \widehat{Q}_0V_0$  sono uguali, secondo quanto detto per le Fig.14 e Fig.15. Si osservi che sulla parabola di rientro  $QA'V_0$  il punto corrispondente ad A è il punto speculare  $A_F$  e l'arco  $AA_F$  è diviso dal segmento tratteggiato  $O'Q'Q$  in due parti uguali, mentre si ha che  $\widehat{AQ'} \neq \widehat{Q'A'}$ , questo perché consideriamo, come visto nel MOTO PERPENDICOLARE, la circonferenza di raggio R percorsa con moto uniforme.

La distanza del punto Q da  $Q'$ , rispettivamente punti delle due circonferenze di raggio  $R_q$  e  $R_p$  decentrate, cambierà di volta in volta a seconda la posizione del punto Q nei confronti della circonferenza di raggio  $R_p$ .

In Fig.17 vediamo che il MOTO NON PERPENDICOLARE non è che un

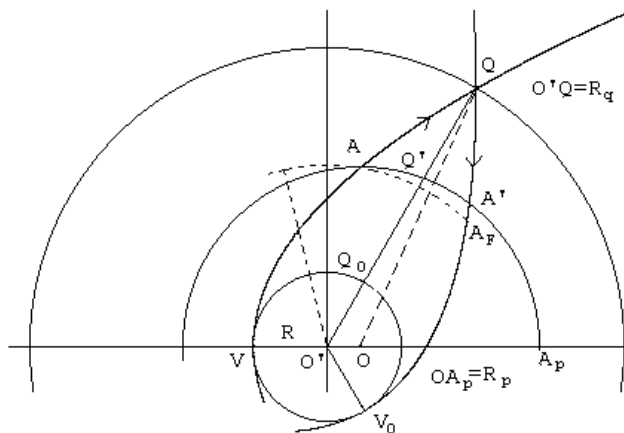


Fig. 17

moto perpendicolare in cui tutte le relazioni che legano le circonferenze di Centro  $O'$ , proprio di tale Moto, sono messe in relazione con una data circonferenza di Centro  $O$  e i punti delle circonferenze di centro  $O'$  sono confrontati con i punti della circonferenza data di centro  $O$ . E' ovvio che se i Centri  $O$  ed  $O'$  coincidono si ritorna alle considerazioni

fatte per il solo moto perpendicolare.

Ci è di aiuto sapere che quando il punto Q ruota, la distanza OQ sappiamo essere il valore della Eq. Parametrica di Vag dell'ellisse, come già visto in Fig.A, pertanto:  $h = \overline{OQ} - R_p$ .

ANALISI DELLA FIG.8.

Il caso **Es.3) Fig. 8**, avrà l'angolo della tangente  $\rho$  compreso tra  $45^\circ < \rho \leq 90^\circ$ : questo vuol dire che al tendere di  $\bar{\rho}$  a  $90^\circ$  il punto A tende a coincidere con V, vertice della parabola. Tenendo conto di quanto detto, questo caso è simile al caso **Es.2) Fig.7** con le opportune considerazioni.

ANALISI DEL CASO **ES.1)** CON  $\rho=45^\circ$ .

Le osservazioni da farsi in questo caso sono assimilabili a

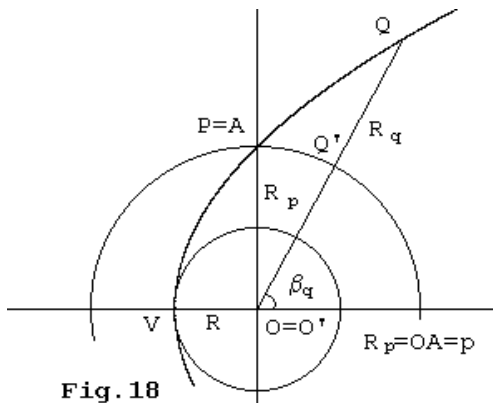


Fig. 18

quelle viste in "IL MOTO PERPENDICOLARE" vedi Fig.18, dove i centri O e O' coincidono.

Ma vediamo alcuni passaggi:

sia l'"altezza" h il segmento QQ'; esso sarà:

$$p = R_p = 2R \quad (\text{per definizione})$$

$$h = R_q - R_p \quad \text{ma} \quad \overline{OQ} = R_q = p + x;$$

$$x = R_q - p = R_q - R_p; \quad x = h = R_q \cos \beta_q$$

quindi l'"altezza" di un punto Q (cioè QQ') coincide con la sua ascissa (cosa questa già vista in **FIGURA 3**).

Vediamo le formule del MOTO NON PERPENDICOLARE:

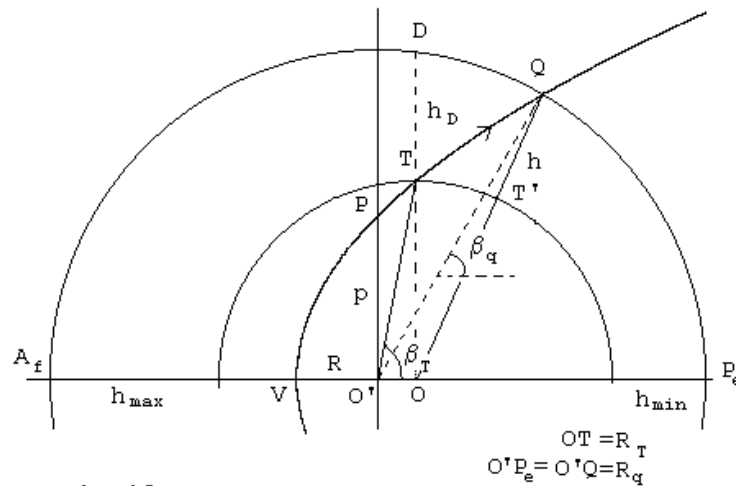


Fig. 19

(Si noti che nella Fig.19 possiamo applicare il TEOREMA DEI PIANETI (Cap. «VI.TRASLAZIONE E ROTAZIONE») due volte, in quanto  $\overline{O'T}$  e  $\overline{OQ}$  sono raggi vettori di ellisse:

- 1)  $\overline{O'T}$  rispetto alla circonferenza di raggio  $R_T$  e centro in  $O$  con valore parametrico  $\frac{\beta_T}{2} = \rho_T$  (tangente alla parabola in  $T$ )
- 2)  $\overline{OQ}$  rispetto alla circonferenza di raggio  $R_q$  e centro in  $O'$  con valore parametrico  $\frac{\beta_q}{2} = \rho_q$  (tangente alla parabola in  $Q$ )

$T(OO'; R_T)$  quale punto della parabola di centro nel fuoco  $O'$ . Da caso **Es.2)** di **Fig.7** otteniamo **a) b) c)**:

$$\text{a) } \beta_T = \arctan \frac{R_T}{OO'}; \quad \text{b) } \frac{\beta_T}{2} = \rho_T;$$

$$\text{c) } p = 2R = R_T \tan \rho_T = R_T \tan \frac{\beta_T}{2} \quad \text{parametro della Parabola}$$

si tenga presente che per  $0 < \beta_T \leq 90^\circ$  sarà  $0 < \rho_T \leq 45^\circ$  e che  $\rho_T$  è l'angolo della tangente alla parabola cioè l'angolo di partenza o alzo, nel punto  $T$ .

$$\text{d) } \begin{cases} R_q = R_T + h_{\min} + OO' \\ R_q = R_T + h_{\max} - OO' \end{cases} \quad \text{uguagliando} \quad \text{e) } \overline{OO'} = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2}$$

Per definizione di parabola:  $\overline{OQ} = p + x = R_q$   $x = R_q - p$  ma  $x = R_q \cos \beta_q$  pertanto:

$$\text{f) } \beta_q = \arccos \frac{x}{R_q} = \arccos \frac{R_q - p}{R_q}$$

$$\text{e in } Q \quad \rho_q = \frac{\beta_q}{2}$$

Nota  $\beta_q$  possiamo scrivere l'Eq. della Ellisse di angolo  $\beta_E$  e semiassi:

$$\begin{cases} R_q - OO' = R_T + h_{\min} = \rho_{\min} & \text{semiasse minore} \\ R_q + OO' = R_T + h_{\max} = \rho_{\max} & \text{semiasse maggiore} \end{cases} \quad \text{dell'Ellisse di centro O.}$$

$$g) \quad \begin{cases} \overline{OQ} \cos \beta_E = (R_q - OO') \cos \beta_q / 2 \\ \overline{OQ} \sin \beta_E = (R_q + OO') \sin \beta_q / 2 \end{cases} \quad *) \quad \tan \beta_E = \frac{(R_q + OO')}{(R_q - OO')} \tan \frac{\beta_q}{2}$$

quadrando e sommando la \*) e considerando che  $\beta_q$  è angolo di parabola avremo  $\beta_q/2 = \rho_q$  ( $\rho_q$  angolo della tangente alla parabola nel punto Q):

$$\overline{OQ}^2 = R_q^2 + \overline{OO'}^2 - 2R_q \overline{OO'} [\cos^2 \rho_q - \sin^2 \rho_q]$$

$$h) \quad |\overline{OQ}| = \sqrt{R_q^2 + \overline{OO'}^2 - 2R_q \overline{OO'} \cos 2\rho_q} \quad \text{infine la distanza } |QT| = h = |\overline{OQ}| - R_T.$$

Per avere la distanza TD, nel punto di lancio, sarà:

$$i) \quad \widehat{O\hat{O}'D} = \beta_D = \arccos \frac{OO'}{R_q} \quad (\widehat{O\hat{O}'D} \text{ non segnato in Fig.19})$$

$$1) \quad R_q \sin \beta_D = |\overline{OD}| \quad \text{e} \quad |\overline{TD}| = h_D = |\overline{OD}| - R_T$$

Possiamo ottenere OD, in quanto vettore dell'Ellisse, anche tramite g) usando l'angolo  $\beta_D/2$  e quadrando, :

$$\begin{cases} \overline{OD} \cos \beta_E = (R_q - OO') \cos \beta_D / 2 \\ \overline{OD} \sin \beta_E = (R_q + OO') \sin \beta_D / 2 \end{cases} \quad \overline{OD}^2 = (R_q - OO')^2 \cos^2 \beta_D / 2 + (R_q + OO')^2 \sin^2 \beta_D / 2$$

Infine il PERIODO o TEMPO DI RIVOLUZIONE del punto Q è dato dalla circonferenza di raggio  $R_q$ :

$$\left( \frac{2R_q \pi}{T} \right)^2 = V^2 = \frac{GM}{R_q} \quad \frac{T^2}{R_q^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM}; \quad m) \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_q^3}{GM}}$$

formule che rappresentano la TERZA LEGGE DI KEPLERO.

La VELOCITÀ orbitale (cioè rispetto ad O) al Perigeo:

$$n) \quad V_{Pe}^2 = GM \left( \frac{2}{R_T + h_{\min}} - \frac{1}{R_T + h_{\max}} \right)$$

#### LA VELOCITA' DEL PUNTO Q.

1Q) (Come n)) Quale punto di una ellisse di semiasse maggiore  $\overline{OA_f}$  e

$$\text{centro O, con velocità orbitale } V_E^2 = GM \left( \frac{2}{\overline{OQ}} - \frac{1}{\overline{OA_f}} \right).$$

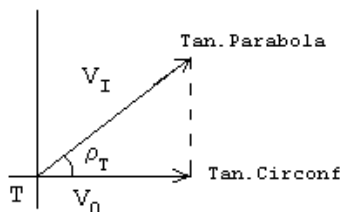
2Q) Quale punto di una circonferenza di centro  $O'$  e raggio  $\overline{O'Q}=R_q$ ,  
 con velocità circolare  $V_c^2 = \frac{GM}{O'Q}$

3Q) Quale punto di una parabola con fuoco nel centro  $O'$ ,  $V_p^2 = \frac{2GM}{O'Q}$

Ora affinché il punto di parabola  $Q$  si trasformi in punto di circonferenza di raggio  $R_q$  la sua velocità deve passare da  $V_p$  a  $V_c$  ed inoltre:

«..occorre che la sua direzione sia normale al raggio vettore; in ogni altro caso la stessa velocità  $V_c$  produce una orbita ellittica..... (F. Zagar-"ASTRONOMIA SFERICA E TEORICA"-Zanichelli E. Bologna)

La velocità  $V_c$  nel nostro caso in esame ha direzione normale al raggio  $\overline{O'Q}=R_q$  ed è quella che deve acquisire il punto  $Q$  per muoversi secondo la circonferenza di raggio  $R_q$  di centro  $O'$ : **questo è ciò che rappresenta la nostra Eq. del moto degli Asteroidi;** inoltre il punto  $Q$  rispetto al centro  $O$  produce giusto una traiettoria ellittica data dalla generica distanza  $OQ$  la cui velocità rispetto al centro  $O$  è appunto la velocità orbitale  $V_E$  nel punto  $Q$ .



Dalla **fig.19** vediamo che il lancio è supposto avvenuto nel punto  $T$  la cui tangente alla parabola è data dall'angolo  $\rho_T$  (alzo) vedi **a)** e **b)**. La velocità iniziale  $V_I$ , cioè la velocità minima che il punto  $T$  deve avere per muoversi lungo la parabola con angolo  $\rho_T$ , è data da (vedi **Fig.20**):

**Fig. 20**

**p)** 
$$V_I = \frac{V_0}{\cos \rho_T}$$

Per  $h_{\min}=h_{\max}$  abbiamo  $OO'=0$  e quindi  $\beta_T = \arctan \frac{R_T}{0}$ ;  $\beta_T = 90^\circ$ ;  $\rho_T = 45^\circ$

le circonferenze sono concentriche e

**p')** 
$$V_I = \frac{V_0}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}V_0 \quad (\text{cioè la velocità di fuga})$$

Importanza dell'alzo o angolo tangente iniziale.

Avendo fornito le possibili formule per un MOTO NON PERPENDICOLARE vediamo che se partiamo dall'angolo della tangente parabolica in  $T$  cioè l'**alzo**  $\rho_T$  ciò vuol dire conoscere  $\beta_T = 2\rho_T$ . Conoscendo  $\beta_T$  e

$OT=R_T$  abbiamo  $OO'$  e  $O'T$ ; e il parametro della parabola  $p=2R=2R_3 \cos^2 \rho_3$  per la **A**].

Dunque l'alzo mi condiziona ma mi permette di conoscere la parabola e la distanza  $OO'$  dal fuoco  $O'$  della parabola ad  $O$ . Ma per decidere in quale punto  $Q$  della traiettoria della parabola voglio che tale traiettoria diventi una circonferenza di raggio  $R_q$  è necessario conoscere almeno uno ed uno solo dei seguenti valori: [h vedi caso **h**];  $h_D$  vedi caso **l**);  $h_{min}$  oppure  $h_{max}$ ] in quanto ciascuno di essi condiziona il valore degli altri.

### APPLICAZIONE:

Dal manuale "Il moto dei Corpi Celesti" di Antonio Leone, ricavo i dati del satellite Oscar-9:

Periodo =  $660' = 11$  ore (39600")

La quota del perigeo:  $h_{min}=1460$  Km

La quota all'apogeo:  $h_{max}=36026,3126$  Km.

Imponendo le due quote, applichiamo le formule viste per ottenere l'Eq. della Ellisse;  $QT'$ ;  $TD$ ; e il periodo (vedi Fig.19).

Il raggio medio terrestre sia  $R_T=6367,365$  Km

$$e) \quad OO' = \frac{36026,3126 - 1460}{2} = 17282,656 \text{ Km} \quad (\text{distanza dei due centri})$$

$$a) \quad \beta_T = \arctan \frac{6367,365}{17282,656} = 20,225066 \quad b) \quad \rho_T = 10,112533 \quad (l'alzo)$$

$$d) \quad R_q = 6367,365 + 1460 + 17282,656 = 25110,021 \text{ Km}$$

(Antonio Leone:  $R_q=25110,52$  tramite il Periodo  $660'$ )

$$c) \quad p = 6367,365 \tan 10,112533 = 1135,6 \text{ E5} \quad \text{parametro della parabola}$$

(essendo  $Q$  punto di parabola, nel riferimento  $O'$  avrà)

$$x = 25,110,021 - 1135,6 = 23974,421$$

$$f) \quad \beta_q = \arccos \frac{23974,421}{25110,021} = 17,297258 \quad \frac{\beta_q}{2} = 8,6486292$$

$$g) \quad \begin{cases} |OQ| \cos \beta_E = (7827,365) \cos 8,6486292 = 7738,3609 \text{ Km} \\ |OQ| \sin \beta_E = (42393,677) \sin 8,6486292 = 6374,927 \text{ Km} \end{cases} \quad (\text{eq. Ellisse})$$

$$h) \quad |OQ| = \sqrt{1,0052 \text{ E18}} = 10026,062 \text{ Km} \quad |QT| = h = |OQ| - R_T = 3658,697 \text{ Km}$$

$$i) \quad \beta_D = \arccos \frac{17282,656}{25110,021} = 46,506108 \quad (\rho_D = \beta_D / 2 = 23,253054)$$

$$l) \quad \overline{OD} = 25110,021 \sin 46,506108 = 18216,008 \text{ Km} \quad \text{e} \quad \overline{TD} = 11848,643 \text{ Km}$$

(applicando **g**), cioè l'eq. dell'Ellisse e quadrando):

$$\begin{cases} |\overline{OD}| \cos \beta_E = (7827,365) \cos 23,253054 = x = 7191,5494 \text{ Km} \\ |\overline{OD}| \sin \beta_E = (42393,677) \sin 23,253054 = y = 16736,72 \text{ Km} \end{cases} \quad |\overline{OD}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 18216,371$$

$$m) T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (25110,021 E5)^3}{6,67 E-8 \cdot 5,976 E27}} = 39598,823 \text{ contro i } 39600 \text{ indicati.}$$

$$n) = \text{Caso 1Q)} \quad V_p^2 = (6,67E-8) \cdot (5,976E27) \left( \frac{2}{7827,365E5} - \frac{1}{42393,677E5} \right) = \\ = (3,986E20) [(2,5551E-9) - (2,3588E-10)] = 9,2444E11$$

$$V_p = 9,6148E5 \quad (\text{velocità orbitale al perigeo})$$

$$\text{analogamente} \quad V_{Af} = 3,0663E5 \quad (\text{velocità orbitale all'afelio})$$

$$V_Q = 8,373E5 \quad (\text{velocità orbitale nel punto Q})$$

$$\text{Caso 2Q)} \quad V_c = \sqrt{\frac{3,986E20}{25110,021E5}} = 3,9842E5$$

$$\text{Caso 3Q)} \quad V_p = V_c \sqrt{2} = 5,6346E5$$

Cerchiamo la  $V_I$ , velocità di inizio (minima) con **p**), essendo  $7,91E5$  velocità della Terra a livello zero:

$$V_I = \frac{7,91 E5}{\cos 10,112533} = 8,0348226 E5$$

Inoltre dalla formula **p')** per  $\rho_T=45$  avremmo avuto  $V_I=11,1864E5$  che vale la velocità di fuga.