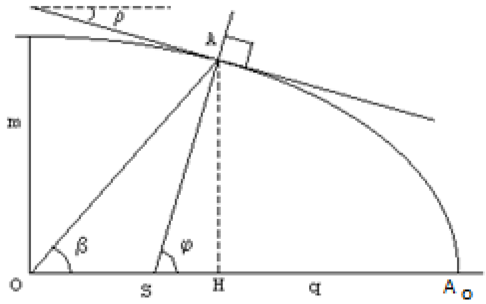
III BIS. PERPENDICOLARI ALLE TANGENTI

PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL'ELLISSE



Abbiamo visto essere la tangente alla ellisse (vedi fig.) nel punto A(qcosα,msinα) di valore:

$$\tan\rho = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha} .$$

Sia la perpendicolare alla tangente nel punto A; si avrà il segmento SA e SA_0 ed il relativo angolo φ. Sappiamo che la relazione che lega i due angoli è:

$$\tan\rho = -\frac{1}{\tan\varphi} = -\frac{m}{q}\frac{1}{\tan\alpha} \qquad \begin{cases} Contatto\, di\, Primo\ Ordine,\ S = Centro\, di\, curvatura \\ \varphi\, angolo\, del\, Raggio\, di\, Curvatura \end{cases}$$

e $\tan\varphi = \frac{q}{m}\tan\alpha$ esprime il legame tra gli angoli φ e α.

Sviluppiamo l'ultima espressione:

$m\sin\varphi\cos\alpha = q\sin\alpha\cos\varphi$ e per SA $m\cos\alpha\ \overline{SA}\sin\varphi = q\sin\alpha\ \overline{SA}\cos\varphi$

Sappiamo anche che : $\begin{cases} \overline{SA}\cos\varphi = q\cos\alpha - \overline{OS} \\ \overline{SA}\sin\varphi = m\sin\alpha \end{cases}$

Sostituendo questa con la precedente: $m\cos\alpha\cdot m\sin\alpha = q\sin\alpha\left(q\cos\alpha - \overline{OS}\right)$

$\overline{OS} = \frac{q^2 - m^2}{q}\cos\alpha = e^2 q\cos\alpha$ (e=eccentricità) infine:

$$\begin{cases} \overline{SA}\cos\varphi = q\cos\alpha - \overline{OS} = q\cos\alpha\left(1 - e^2\right) = \frac{m^2}{q}\cos\alpha \\ \overline{SA}\sin\varphi = m\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\beta = \frac{m}{q}\tan\alpha \\ \tan\varphi = \frac{q}{m}\tan\alpha = \frac{q^2}{m^2}\tan\beta \end{cases}$$

$$\overline{SA}^2 = \left(\frac{m^2}{q}\cos\alpha\right)^2 + \left(m\sin\alpha\right)^2 \quad ; \quad \alpha = 0° \ \ \overline{SA} = \frac{m^2}{q} \quad ; \quad \alpha = 90° \ \ \overline{SA} = m$$

L'ultima formula dà il valore del segmento perpendicolare alla tangente in un punto dell'Ellisse, svolgendola:

$$\overline{SA}^2 = \frac{m^2}{q^2}(m^2\cos^2\alpha + q^2\sin^2\alpha) \qquad \text{(con asse m sull'ascissa)}$$

$$\left|\overline{SA}\right| = \frac{m}{q}\sqrt{q^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha} \qquad \text{(con asse q sull'ascissa)}$$

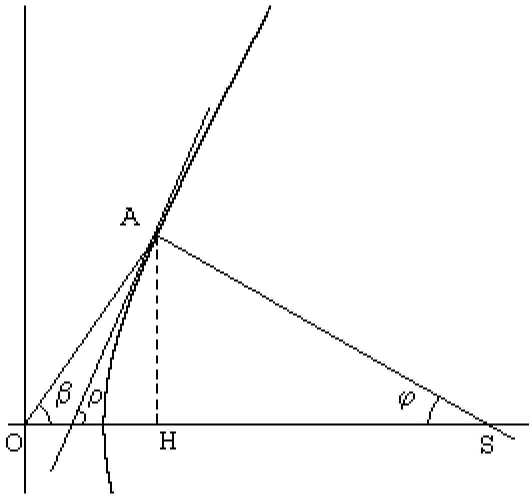
Dal Cap.VII "ARCO DELL'ELLISSE - RETTIFICAZIONE" abbiamo che:

$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{q^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha}$ ellisse con asse q sull'ascissa, pertanto

$$\overline{SA} = \left(\frac{m}{q}\frac{ds}{d\alpha}\right); \qquad \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m}\overline{SA} \qquad \alpha = 0° \ \ \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m}\frac{m^2}{q} = m \qquad \alpha = 90° \ \ \frac{ds}{d\alpha} = \frac{q}{m}m = q$$

PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELL'IPERBOLE

Sia la tangente nel punto A (x,y) all'iperbole (vedi figura) e la



perpendicolare ad esso. La relazione che lega gli angoli φ e ρ è la stessa che abbiamo visto nell'ellisse:

$$\tan\rho = -\frac{1}{\tan(180-\varphi)} = \frac{m}{q}\frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{quindi}$$

$$\tan\varphi = \frac{q\sin\alpha}{m}\ ; \qquad m\sin\varphi = q\sin\alpha\cos\varphi$$

Sapendo che:

$$\begin{cases} SA\cos\varphi = SH = OS - OH = OS - \dfrac{q}{\cos\alpha} \\ SA\sin\varphi = OA\sin\beta = m\tan\alpha \end{cases}$$

da cui $m\,\overline{SA}\sin\varphi = q\sin\alpha\,\overline{SA}\cos\varphi$ $\quad m^2\tan\alpha = q\sin\alpha\left(\overline{OS} - \dfrac{q}{\cos\alpha}\right)$

$$m^2\tan\alpha = q\sin\alpha\,\overline{OS} - q^2\tan\alpha \qquad q\sin\alpha\overline{OS} = \left(m^2+q^2\right)\tan\alpha \qquad \overline{OS} = \frac{m^2+q^2}{q}\frac{1}{\cos\alpha} = e^2\frac{q}{\cos\alpha}$$

Sostituiamo: $\begin{cases} SA\cos\varphi = \dfrac{q}{\cos\alpha}\left(e^2-1\right) = \dfrac{m^2}{q}\dfrac{1}{\cos\alpha} \\ SA\sin\varphi = m\tan\alpha \end{cases}$ $\qquad \tan\varphi = \dfrac{q}{m}\sin\alpha = \dfrac{q^2}{m^2}\tan\beta$

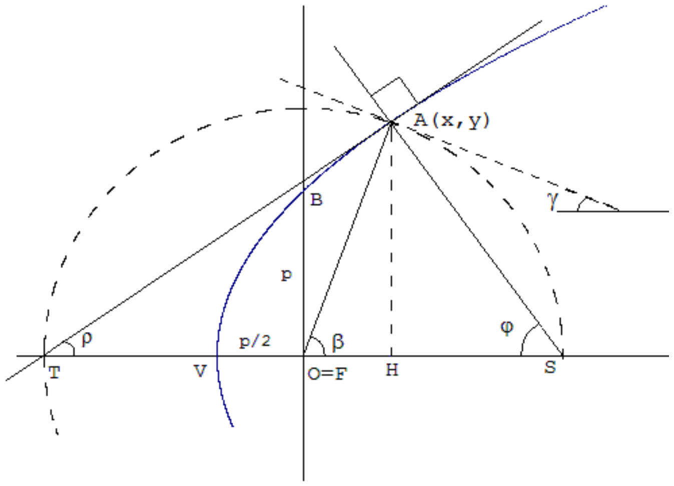
$$\overline{SA}^2 = \left(\frac{m^2}{q}\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(m\tan\alpha\right)^2 \qquad \overline{SA}^2 = \frac{m^4}{q^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{m^2q^2}{q^2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\ ;$$

$$\overline{SA} = \frac{m}{q\cos\alpha}\sqrt{m^2+q^2\sin^2\alpha} = \frac{m\cos\alpha}{q}\,\frac{\sqrt{m^2+q^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha}$$

ma come abbiamo visto per l'ellisse dal Cap.VII "PERIMETRO DELL'IPERBOLE(RETTIFICAZIONE)" sappiamo:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{\sqrt{m^2+q^2\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha} \qquad \text{avremo:} \qquad \overline{SA} = \frac{m\cos\alpha}{q}\frac{ds}{d\alpha} \qquad \frac{ds}{d\alpha} = \overline{SA}\,\frac{q}{m\cos\alpha}$$

PERPENDICOLARE ALLA TANGENTE DELLA PARABOLA



Delle quattro parabole scegliamo quella i cui punti distano

$$\overline{OA} = (p+x) = \frac{p}{1-\cos\beta}$$

con A di coord.

$$y = \frac{p\mathrm{sen}\beta}{1-\cos\beta} \qquad x = \frac{p\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

$$y' = \tan\rho = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{p}{y}$$

La perpendicolare alla tangente in A sia SA.
(Si osservi che il valore dell'angolo ρ della tangente passa da 90° a 45° per il punto A rispettivamente tra V e B e da 45° a 0 per A che si allontana da B lungo la parabola.)

$$\tan\rho = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{p}{y}\,; \qquad \tan\varphi = \frac{y}{p}$$

$p\sin\varphi = y\cos\varphi$ moltiplicato per SA: $p\,\overline{SA}\sin\varphi = y\,\overline{SA}\cos\varphi$; $py = y\overline{SA}\cos\varphi$

quindi: $$\begin{cases}\overline{SA}\cos\varphi = p = \overline{HS} = \overline{OS} - x \\ \overline{SA}\sin\varphi = y\end{cases}$$ **[1]**

e deduciamo che: $$\overline{OS} = (p+x) = \overline{OA}\,;$$

quindi il triangolo SOA è ISOSCELE in O=F per cui:

$$\overline{SA} = 2\overline{OA}\sin\frac{\beta}{2} = 2\left(\frac{p}{1-\cos\beta}\right)\sin\frac{\beta}{2}$$ e sapendo

$$\sin\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}\cdot\frac{2}{2}}$$ abbiamo $$\overline{SA} = p\frac{\sqrt{2(1-\cos\beta)}}{1-\cos\beta}$$ **[2]**

Da **[1]** vediamo: $$\overline{SA}^2 = p^2 + y^2 \qquad \left|\overline{SA}\right| = y\sqrt{1+\left(\frac{p}{y}\right)^2}$$

e dal Cap.VII "PERIMETRO DELLA PARABOLA (RETTIFICAZIONE)" avremo:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{p}{y}\right)^2} \qquad \overline{SA} = y\frac{ds}{dx} \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{\overline{SA}}{y}$$

Derivando x come funzione di β avremo:

$$dx = \frac{p\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2}d\beta$$ e poiché $$y = \frac{p\sin\beta}{(1-\cos\beta)}$$

$$\frac{ds}{d\beta} = \overline{SA}\frac{(1-\cos\beta)}{p\sin\beta}\frac{p\sin\beta}{(1-\cos\beta)^2}\,; \qquad \frac{ds}{d\beta} = \frac{\overline{SA}}{(1-\cos\beta)}$$

infine applicando la **[2]** si ottiene:

$$\frac{ds}{d\beta} = p\frac{\sqrt{2(1-\cos\beta)}}{(1-\cos\beta)^2} \qquad \textbf{[3]}$$

Considerazioni sulla tangente della parabola.
Si osservi che:

$$\overline{HT} = \frac{\overline{HA}}{\tan\rho} \qquad \overline{HA} = y \qquad \tan\rho = \frac{p}{y} \quad \overline{HT} = \frac{y^2}{p}$$

dai valori della pagina precedente si sostituisca y:

$$\overline{HT} = \frac{1}{p}\left(\frac{p\sin\beta}{1-\cos\beta}\right)^2 = p\frac{1-\cos^2\beta}{(1-\cos\beta)^2} = p\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

Vediamo come TV=VH infatti:

$$\overline{VH} = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2} + \frac{p\cos\beta}{1-\cos\beta} = \frac{p}{2}\,\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta} = \frac{\overline{HT}}{2}$$

pertanto $\overline{TV} = \overline{HT} - \overline{VH}$ quindi $\overline{TV} = \frac{\overline{HT}}{2} = \overline{VH}$

In una parabola con origine nel Fuoco la tangente in un suo punto taglia l'asse delle X in un punto che dista dal vertice:

$$\overline{TV} = \overline{VH} = \frac{p}{2} + x = \frac{p}{2}\,\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}$$

Inoltre: $\overline{TO} = \overline{TV} + \overline{VO} = \left(\frac{p}{2} + x\right) + \frac{p}{2} = (p + x) = \overline{OA}$

Poichè TOA è un triangolo isoscele in O è $\beta=2\rho$.
Potendosi considerare OA raggio di una circonferenza di centro O,anche TO diventa raggio di tale circonferenza.
Sarà anche $\overline{SH} = \overline{SO} - \overline{HO} = (p+x) - x = p = \overline{OB}$ (parametro della Parabola)

RIEPILOGANDO:
$\overline{SO} = \overline{OA}$; $\overline{OT} = \overline{OA}$; $\overline{SH} = \overline{OB} = p$ (costante); $\overline{TV} = \overline{VH}$
Detto γ l'angolo della tangente in A alla circonferenza avremo:
$\beta = 2\rho$
$\gamma = 90° - \beta$; $\beta = 90° - \gamma$; $\gamma = 90° - 2\rho$.